ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В. БОЙКОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пенза

2004

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом настоящей книги являются приближенные методы решения слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений.

Теория интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра активно развивается начиная с конца XIX столетия, причем одновременно с развитием теории развивались и численные методы. В настоящее время одним из основных направлений в приближенных методах решения интегральных уравнений является развитие оптимальных по точности и сложности методов решения слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

Первая часть книги посвящена изложению этих методов (в основном для многомерных интегральных уравнений).

Теория сингулярных интегральных уравнений зародилась в начале XX века в трудах выдающихся математиков Д. Гильберта и А.Пуанкаре и бурно развивалась в течение всего XX столетия.

Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений (без регуляризации) начали исследоваться значительно позже. Первой работой в этом направлении была работа М.А. Лаврентьева, датируемая 1932 г., в которой было предложено два метода решения сингулярных интегральных уравнений первого рода, описывающих задачу обтекания воздушным потоком крыла конечного размера.

Начиная с середины 50-х г. прошлого столетия, начался «исследовательский бум» в области численных методов решения сингулярных интегральных уравнений, который продолжается и по сегодняшний день. Этим исследованиям посвящены многие сотни статей и десятки монографий. За эти годы оформилось несколько направлений в численных методах решения сингулярных интегральных уравнений, основанных на различных идеях и подходах.

Во второй части книги излагаются основные результаты , полученные в одном из направлений приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений.

Книга в первую очередь адресована специалистам в области вычислительной математики и математической физики. Она также может быть полезна инженерам-исследователям, сталкивающимся в своей деятельности с необходимостью решения интегральных уравнений. Отдельные параграфы книги могут быть использованы в качестве учебного пособия по дисциплине «Граничные интегральные уравнения» для студентов специальности «Прикладная математика». Для удобства читателей в книге приведены необходимые сведения из теории приближений, функционального анализа, теории краевых задач и сингулярных интегральных уравнений.

Исследования автора по приближенным методам решения слабо-

сингулярных и сингулярных интегральных уравнений и их приложениям были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 94-01-00653, 97-01-00621), Министерством образования РФ (гранты по вычислительной математике 1994 – 1996 гг. и 1998 – 2000 гг.) и Российским гуманитарным научным фондом
(грант 01-02-00147а).

ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка задачи оптимизации

Настоящая книга посвящена построению и обоснованию вычислительных схем приближенного решения слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений различных видов. Рассматриваются приближенные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма и одномерных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегральных уравнений различных видов. Особое внимание уделяется построению оптимальных по точности и сложности методов решения интегральных уравнений.

В настоящее время под обоснованием приближенных методов решения задач математического анализа (дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач математической физики и др.) понимается [91] их теоретическое исследование, при котором в порядке возрастающей точности и трудности встают следующие три вопроса:

а) установление осуществимости и сходимости алгоритма;

б) исследование быстроты сходимости;

в) эффективная оценка погрешности.

Как правило, для решения каждого класса уравнений можно построить достаточно большое число приближенных методов, основанных на различных идеях и подходах. Поэтому возникает необходимость в сравнении этих методов. В качестве критериев сравнения различных методов могут быть взяты определения оптимальности алгоритмов.

В работе будут использованы критерии оптимальности по точности и сложности, основанные на восходящей к П. Л. Чебышеву минимаксной концепции.

В настоящее время имеется ряд различных определений оптимальности алгоритмов по точности и сложности (см. [6], [80], [147], [149], [155], [156]).

Нами используется определение Н. С. Бахвалова оптимальных по точности алгоритмов решения задач математической физики [6].

Опишем, следуя [6], постановку задачи построения оптимальных по точности алгоритмов численного решения интегральных уравнений на примере уравнения

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_a^b h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \qquad (1.1)$$

Для сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) постановка задачи аналогична.

Пусть $\{h\}$ принадлежит классу достаточно гладких функций H, а $\{f\}$ – классу достаточно гладких функций F. Пусть Ψ – класс вектор-функционалов, определенных на H, а Ψ^* – класс вектор - функционалов, определенных на F. Пусть M – множество алгоритмов в смысле Маркова, и пусть $R = R(K, h, f, A, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N, t)$ означает результат приближенного решения уравнения (1.1) с помощью алгоритма $A \in M$, использующего информацию об h, заданную не более чем N^2 значениями $\psi_v(h), v = 1, 2, \dots, N^2$, вектор - функционалов $\psi_v \in \Psi$ и использующего информацию об f, заданную не более чем N значениями $\psi_v^*(f), v = 1, 2, \dots, N$, вектор - функционалов $\psi_v^* \in \Psi^*$.

Введем обозначения

$$v(K, h, f, A, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N) = \rho(x^*, R),$$

$$v(K, H, F, A, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N) = \sup_{f \in F, h \in H} v(K, h, f, A, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v\}_1^N),$$

$$v(K, H, F, M, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N) = \inf_{A \in M} v(K, H, F, A, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N),$$

$$v_N(K, H, F, M, \Psi, \Psi^*) = \inf_{\{\psi_v\}_1^{N^2} \in \Psi, \{\psi_v^*\}_1^N \in \Psi^*} v(K, H, F, M, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N),$$

$$v(K, H, F, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N) = \inf_A v(K, H, F, A, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N),$$

$$v_N(K, H, F, \Psi, \Psi^*) = \inf_{\{\psi_v\}_1^{N^2} \in \Psi, \{\psi_v^*\}_1^N \in \Psi^*} v(K, H, F, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N),$$

$$v_N(K, H, F) = \inf_{\{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N} v(K, H, F, \{\psi_v\}_1^{N^2}, \{\psi_v^*\}_1^N).$$

Здесь $\rho(x^*, R)$ означает меру погрешности точного решения $x^*(t)$ уравнения (1.1), а $v_N(K, H, F, \Psi, \Psi^*)$ и $v_N(K, H, F)$ – соответственно, нижнюю грань по всем алгоритмам, использующим информацию из классов Ψ, Ψ^*, и по всем способам задания функционалов.

Алгоритм A, использующий информацию $\{\overline{\psi}_v\}_1^{N^2} \in \Psi, \{\overline{\psi}_v^*\}_1^N \in \Psi^*$, называется оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку, если

$$\frac{v(K, H, F, A, \{\overline{\psi}_v\}_1^{N^2}, \{\overline{\psi}_v^*\}_1^N)}{v_N(K, H, F, \Psi, \Psi^*)} = 1, \sim 1, \asymp 1$$

соответственно.

При постановке задачи построения оптимальных по сложности алгоритмов решения задачи $\alpha = S(f)$, где $S-$ линейный или нелинейный оператор, будем следовать книге [155]. В качестве набора простейших операций возьмем набор $P = \{$арифметические операции, вычисление значения функции$\}$.

Пусть $\eta-$ информационный оператор, допустимый по отношению к P, $A-$ алгоритм, использующий допустимую информацию η. Элемент $\eta(f)$ называется информацией об f. Через $\mathrm{comp}(\eta(f))$ обозначается информационная сложность вычисления $\eta(f)$. Это означает, что если $\eta(f)$ требует выполнения простейших операций $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то $\mathrm{comp}(\eta(f)) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{comp}(p_i)$.

Пусть $A-$ линейный или нелинейный оператор. Для вычисления $A(\eta(f))$ следует вычислить $y = \eta(f)$ и $A(y)$. Пусть вычисление $A(y)$ требует выполнения простейших операций $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Величина
$\mathrm{comp}(A(y)) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{comp}(q_i)$ называется комбинаторной сложностью вычислений $A(y)$.

Пусть E_1 и E_2- линейные пространства, E_0- множество в линейном пространстве E_1, $\quad S : E_0 \to E_2-$ линейный или нелинейный оператор, $\varepsilon > 0-$ вещественное число. Задача состоит в отыскании ε-приближения $x = x(f)$ к решению α задачи $\alpha = S(f) : \|x - \alpha\| \le \varepsilon$ для всех $f \in E_0$. В задаче $\alpha = S(f) \quad S$ называется оператором решения, $f-$ элементом задачи, $\alpha-$ элементом решения. Обозначим через $\Delta(f) = \{\tilde{f} : \eta(\tilde{f}) = \eta(f), \quad \tilde{f} \in E_0\}$ прообраз в E_0 элемента $y = \eta(f)$. Радиусом информации η для задачи S называется величина

$$r(\eta, S) = \sup_{f \in E_0} \inf_{\alpha \in E_2} \sup_{\tilde{f} \in \Delta(f)} \|\alpha - S(\tilde{f})\|.$$

Погрешностью алгоритма A называется величина

$$e(A) = \sup_{f \in E_0} \|A(\eta(f)) - S(f)\|.$$

Пусть $r(\eta, S) < \varepsilon$ для некоторого допустимого η. Обозначим через $\Phi(\varepsilon)$ класс всех допустимых алгоритмов, для которых $e(A) < \varepsilon$. Будем считать класс $\Phi(\varepsilon)$ непустым. Так как набор простейших операций фиксирован, зависимость сложности от P не рассматривается.

Сложность алгоритма $\varphi \in \Phi$ определяется равенством

$$\mathrm{comp}(\varphi) = \sup_{f \in E_0} (\mathrm{comp}(\eta(f)) + \mathrm{comp}(\varphi(\eta(f)))).$$

Определение 1.1 [155]. Величина $\mathrm{comp}(\eta, S, \varepsilon)$, задаваемая формулой

$$\mathrm{comp}(\eta, S, \varepsilon) = \begin{cases} \inf\limits_{\varphi \in \Phi(\varepsilon)} \mathrm{comp}(\varphi), & \text{если } r(\eta, S) < \varepsilon \text{ и } \varphi(\varepsilon) \neq \oslash, \\ \infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

называется ε-сложностью задачи S при использовании информации η.

В книге [155] дано определение оптимального по сложности алгоритма. Распространим это определение на асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку алгоритмы.

Определение 1.2. Алгоритм $\varphi^{oc} \in \Phi(\varepsilon)$ называется оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку по сложности алгоритмом для задачи S при использовании информации η, если $\mathrm{comp}(\varphi^{oc}) = \mathrm{comp}(\eta, S, \varepsilon)$, $\quad \mathrm{comp}(\varphi^{oc}) \sim \mathrm{comp}(\eta, S, \varepsilon)$, $\mathrm{comp}(\varphi^{oc}) \asymp$
$\asymp \mathrm{comp}(\eta, S, \varepsilon)$, соответственно.

Приведем исторически более раннее определение оптимальных по сложности алгоритмов, которым неоднократно будем пользоваться на протяжении всей работы. При этом для определенности остановимся на уравнениях вида

$$x(t) + \lambda \int\limits_a^b h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t). \tag{1.2}$$

Предполагается, что в уравнении (1.2) минимальное расстояние от 1 до собственного значения уравнения больше $d\,(d > 0)$.

Пусть $\Xi(n)-$ множество всех приближенных методов решения уравнения (1.2), при которых производится не больше чем n арифметических действий.

Введем, следуя [80], величину

$$E(n, \Psi_1, \Psi_2, d) = \inf_{\Xi(n)} \sup_{h \in \Psi_1, f \in \Psi_2} \|x^*(t) - x_n^*(t)\|_C,$$

где Ψ_1, Ψ_2- классы функций; $x^*(t)-$ точное решение уравнения (1.2), $x_n^*(t)-$ приближенное решение уравнения (1.2), требующее n арифметических действий.

Введем функционал $\zeta_n(\xi) = \sup_{h \in \Psi_1, f \in \Psi_2} \|x^*(t) - \overline{x}_n^*(t)\|_C$, где $\overline{x}_n^*(t)-$ приближенное решение уравнения (1.2) по алгоритму $\xi(n)$, требующему не более n арифметических операций.

Приближенный метод $\xi(n) \in \Xi(n)$ назовем оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку по сложности на классах Ψ_1, Ψ_2, если

$$\frac{E(n, \Psi_1, \Psi_2, d)}{\zeta_n(\xi)} = 1, \sim 1, \asymp 1.$$

Выше было дано определение оптимальных по сложности алгоритмов в предположении, что в качестве простейших операций взяты арифметические операции и операции вычисления функций. Как будет показано в главе II, сложность решения интегральных уравнений существенным образом зависит от набора простейших операций.

Ниже, следуя [130], на примере уравнения (1.1) дадим определения сложности и кардинальности решений интегральных уравнений.

Пусть $X-$ банахово пространство, $F-$ класс функций, $\tilde{H}-$ множество линейных непрерывных операторов, действующих из X в X и таких, что уравнение

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_{\Omega} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{1.3}$$

$t = (t_1, \ldots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$, $l \geq 2$, однозначно разрешимо при любых $H \in \tilde{H}$ и $f \in F$. Класс таких уравнений будем, следуя [130], обозначать $[\tilde{H}, F]$.

Исследуем сложность нахождения приближенных решений уравнений (1.3) для некоторых классов $[\tilde{H}, F]$. Постановка задачи и терминология заимствованы из монографии [155].

Следуя [155, с. 101], к простейшим операциям условимся относить арифметические операции и операции вычисления значений различных линейных функционалов, определенных на $\tilde{H}$ и F. При этом, как и в [155, с. 28, 101], каждой простейшей операции ρ ставится в соответствие число $\mathrm{comp}(\rho) \geq 1$, называемое сложностью операции ρ. Сложность арифметических операций принимается равной 1, а сложность операции вычисления значения линейного функционала не превышает фиксированного числа $d \geq 1$.

Пусть $T = \{\delta_i\}_{i=1}^{N}-$ некоторый набор линейно-независимых линейных непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1, \ldots, \delta_k$ определены на множестве $\tilde{H}$, а $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_N-$ на множестве $F \subset X$. Каждому уравнению (1.3) из $[\tilde{H}, F]$ ставится в соответствие вектор

$$T(H, f) = (\delta_1(H), \ldots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \ldots, \delta_N(f)), \tag{1.4}$$

который будем называть информацией об уравнении (1.3), а набор функционалов $T-$ способом задания информации. Число линейно-независимых функционалов δ_i, образующих набор T, обозначим card(T). Информационной сложностью вычисления $T(H,f)$, как и в [155, с. 28], назовем величину

$$\mathrm{comp}(T(H,f)) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{comp}(\delta_i(H)) + \sum_{i=k+1}^{N} \mathrm{comp}(\delta_i(f)),$$

где $\mathrm{comp}(\delta_i(H))-$ сложность выполнения простейшей операции, состоящей в нахождении значения функционала δ_i на элементе H; обозначение $\mathrm{comp}(\delta_i(f))$ имеет аналогичный смысл. Ясно, что при сделанных выше предположениях для любого способа задания информации $T = \{\delta_i\}$

$$\mathrm{comp}(T(H,f)) \leq d\mathrm{card}(T), \tag{1.5}$$

где card $(T)-$ кардинальность информации T.

Напомним, следуя [155, с. 41] определение кардинальности card (η) информационного оператора η.

Пусть E_1 и E_2- линейные пространства, $\eta(\eta : E_1 \to E_2)-$ информационный оператор и пусть ker $(\eta) = \{f : \eta(f) = 0\}-$ ядро η.

Определение 1.3 [155]. Кардинальностью информации η называется величина card(η), определяемая по формуле card$(\eta) =$
$=$ codimkerη.

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из $[\tilde{H}, F]$ будем понимать оператор, сопоставляющий информации (1.4) в качестве приближенного решения уравнения (1.3) функцию $A(T,H,f) \in$
$\in X$. При этом для построения $A(T,H,f)$ требуется выполнить лишь некоторое число простейших операций $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_j$. Следуя [155,
с. 29], величину $\mathrm{comp}(T(H,f)) = \mathrm{comp}(\rho_1) + \ldots + \mathrm{comp}(\rho_j)$ назовем комбинаторной сложностью вычисления $A(T,H,f)$, а величину
$\mathrm{comp}(A) = \sup\limits_{H \in \tilde{H} f \in F} (\mathrm{comp}(T(H,f)) + \mathrm{comp}(A(T(H,f)))-$ сложностью алгоритма A.

При фиксированном способе задания информации T множество алгоритмов, использующих для построения приближенных решений уравнений (1.3) информацию (1.4), обозначим через $A(T)$, а множество алгоритмов $A \in A(T)$, для которых

$$e_X([\tilde{H}, F], A) = \sup_{z+Hz=f, H \in \tilde{H}, f \in F} \|z - A(T,H,f)\|_X < \varepsilon,$$

через $A_X(T,\varepsilon)$.

Определение 1.4 [155, с. 32]. Пусть Γ - некоторое множество способов задания информации. Если хоть одно из множеств $A_X(T,\varepsilon) \neq$
$\neq \oslash$ при $T \in \Gamma$, то величина

$$\mathrm{comp}_X([\tilde{H},F],\Gamma,\varepsilon) = \mathrm{inf}_{T\in\Gamma}\mathrm{inf}_{A\in A_X(T,\varepsilon)}\mathrm{comp}(A)$$

называется ε-сложностью решения уравнений из $[\tilde{H},F]$ в пространстве X при информации из Γ. Если $\Gamma = \Gamma_U-$ множество всевозможных способов задания информации вида (1.4), то величина

$$\mathrm{comp}_X([\tilde{H},F],\varepsilon) = \mathrm{comp}_X([\tilde{H},F],\Gamma_U,\varepsilon)$$

называется ε-сложностью решения уравнений из $[\tilde{H},F]$ в X.

Определение 1.5 [155, с. 103]. Пусть $\Gamma \subset \Gamma_U$, $\Gamma_N = \{T : T \in$
$\in \Gamma_U, \mathrm{card}(T) \leq N\}$, $E_N(|\tilde{H},F],X,\Gamma) = \mathrm{inf}_{T\in\Gamma\cap\Gamma_N}\mathrm{inf}_{A\in A(T)}e_X([\tilde{H},F],A)$. Назовем ε-кардинальностью задачи нахождения решений уравнений (1.3) из $[\tilde{H},F]$ в пространстве X при информации из Γ величину $N_\varepsilon([\tilde{H},F],\Gamma,X) = \min\{N : E_N([\tilde{H},F],X,\Gamma) < \varepsilon\}$.

При любом множестве способов задания информации Γ выполняется неравенство [155, с. 104] $N_\varepsilon([\tilde{H},F],\Gamma,X) \leq$
$\leq c\mathrm{comp}_X([\tilde{H},F],\Gamma,\varepsilon)$, где постоянная c зависит лишь от сложности простейших операций.

2. Классы функций

Класс $W^r(M;a,b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a,b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $r-1$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Класс функций Гельдера $H_\alpha(M;a,b)(0 < \alpha \leq 1)$ состоит из заданных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x'-x''|^\alpha$.

Через $W^rH_\alpha(M;a,b)$ $(r = 1,2,\ldots; 0 < \alpha \leq 1)$ обозначен класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a,b]$ производные r порядка, удовлетворяющие условию $|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x'')| \leq M|x'-x''|^\alpha$ при всех x' и x'' из $[a,b]$.

Если из контекста ясно, о каком отрезке $[a,b]$ идет речь, вместо класса функций Гельдера $H_\alpha(M;a,b)(0 < \alpha \leq 1)$ будем писать

$H_\alpha(M)(0<\alpha\le 1)$. Это замечание относится и к остальным определениям.

Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет интегральному условию Гельдера $f\in H_p^{(r+\alpha)}(A,\gamma), r=0,1,\dots,;0<\alpha<1$, если $\left|\int\limits_\gamma |f^{(r)}(t+h)-f^{(r)}(t)|^p dt\right|^{1/p}\le A|h|^\alpha$.

Класс $W^r_{L_p}(M;a,b)(1\le p<\infty)$ состоит из функций, заданных на $[a,b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную $f^{(r)}(x)$ порядка r, обладающую тем свойством, что

$$\left[\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx\right]^{1/p}\le M,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Для простоты обозначений ниже вместо $W^r_{L_p}$ будем писать W^r_p.

Через $\tilde W^r_p(M;a,b)$ обозначен класс периодических с периодом $(b-a)$ функций, входящих в класс $W^r_p(M;a,b)$.

Через $H_{\omega_1\omega_2}(D)$ обозначен класс определенных на $D=\{a\le x\le$ $\le b, c\le y\le d\}$ функций $f(x,y)$, таких, что для любых точек (x',y') и (x'',y'') из D $|f(x',y')-f(x'',y'')|\le\omega_1(|x'-x''|)+\omega_2(|y'-y''|)$, где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)-$ заданные модули непрерывности. В случаях, когда $\omega_i(x)=x^{\alpha_i}$ $(i=1,2)$, используется обозначение $H_{\alpha_1\alpha_2}(D)$.

$W^{r,s}H_{\omega_1\omega_2}(D)$ означает класс определенных на D функций $f(x,y)$, имеющих производные $f^{(\alpha,\beta)}=\partial^{\alpha+\beta}f(x,y)/\partial x^\alpha\partial y^\beta$ $(0\le\alpha\le r,\quad 0\le$
$\le\beta\le s)$, причем $f^{(\alpha,\beta)}\in H_{\omega_1\omega_2}$.

Через $C^r_l(1)$ обозначен класс функций l независимых переменных, у которых существуют и ограничены по модулю единицей все частные производные до r-го порядка включительно.

В работе К.И.Бабенко [4] введен класс функций $Q_r(\Omega,M)$.

Определение 2.1. Пусть $\Omega=[-1,1]^l,\qquad l=1,2,\dots$ Функция $\varphi(x_1\dots,x_l)$ принадлежит классу $Q_r(\Omega,M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega}|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M\quad \text{при } 0\le|v|\le r,$$

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}|\le M/(\rho(x,\mathit{\Gamma}))^{|v|-r}\quad \text{при } r<|v|\le 2r+1,$$

где $x=(x_1,\dots,x_l)$, $v=(v_1,\dots,v_l)$, $|v|=v_1+\dots+v_l$, $\rho(x,\mathit{\Gamma})-$ расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле $\rho(x,\mathit{\Gamma})=\min_{1\le i\le l}\quad\min(|-1-x_i|,|1-x_i|)$.

Приводимые ниже классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\quad B_{r,\gamma}(\Omega)$ являются обобщением класса $Q_r(\Omega, M)$.

Определение 2.2 [33]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2,\ldots$. Функция $\varphi(x_1 \ldots, x_l)$ принадлежит классу $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq M \quad \text{при } 0 \leq |v| \leq r,$$

$$|\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq M/(\rho(x,\mathit{\Gamma}))^{v-r-\zeta} \quad \text{при } r < |v| \leq s,$$

где $s = r + \gamma$, $\quad \zeta = 0$, если $r + \gamma-$ целое; $s = r + [\gamma] + 1$, $\quad \gamma = [\gamma] + \mu$, $\quad 0 < \mu < 1$, $\quad \zeta = 1 - \mu$, если $r + \gamma-$ нецелое.

Определение 2.3 [33]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $\quad l = 1,2\cdots$, $\quad r = 1,2,\ldots, 0 \leq \gamma < 1$. Функция $f(x_1,\ldots,x_l)$ принадлежит $B_{r,\gamma}(\Omega)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq A^{|v|}|v|^{|v|} \quad \text{при } 0 \leq |v| \leq r,$$

$$|\partial^{|v|}\varphi(x_1,\ldots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \leq A^{|v|}|v|^{|v|}/(\rho(x,\mathit{\Gamma}))^{|v|-r-1+\gamma}$$

при $r < |v| \leq \infty$.

Определение 2.4 [53]. Пусть $\Omega = [0,T]^l$, $l = 1,2,\ldots$. Через $Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)$ обозначим класс функций $f(t_1,\ldots,t_l)$, определенных на Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{t\in\Omega} |f^{(v)}(t)| \leq M \quad \text{при} \quad 0 < |v| \leq r,$$

$$|f^{(v)}(t)| \leq M/(\rho(t,\Gamma_0))^{|v|-r-\zeta} \quad \text{при} \quad r < |v| \leq s,$$

где $t = (t_1,\ldots,t_l)$; $v = (v_1,\ldots,v_l)$, $|v| = v_1+\cdots+v_l$; $s = r+\gamma$, $\zeta = 0$, если γ – целое; $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$, если γ – нецелое; $\rho(t,\Gamma_0)$ – расстояние от точки t до пересечения Γ_0 границы Γ области Ω с координатными осями, вычисляемое по формуле $\rho(t,\Gamma_0) = \min_i |t_i|$; $\quad f^{(v)}(t) = \partial^{|v|}f(t_1,\ldots,t_l)/\partial t_1^{v_1}\cdots\partial t_l^{v_l}$.

Замечание. При $l = 1$ через Γ_0 обозначается точка $t = 0$.

Определение 2.5 [53]. Пусть $\Omega = [0,T]^l$, $l = 1,2,\ldots$. Через $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega, M)$ обозначим класс функций $f(t_1,\ldots,t_l)$, определенных на Ω и удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max_{t\in\Omega} |f^{(v)}(t)| \leq M \quad \text{при} \quad 0 < |v| \leq r,$$

$$|f^{(v)}(t)| \leq M/(\rho(t,0))^{|v|-r-\zeta} \quad \text{при} \quad r < |v| \leq s,$$

где $t = (t_1, \dots, t_l)$; $v = (v_1, \dots, v_l)$, $|v| = v_1 + \dots + v_l$; $s = r + \gamma$, $\zeta = 0$, если γ – целое; $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$, если γ – нецелое; $\rho(t, 0)$ – расстояние от точки t до начала координат, вычисляемое по формуле $\rho(t, 0) = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_l^2}$.

Замечание. Очевидно, что в одномерном случае ($l = 1$) классы $Q_{r,\gamma}^*(\Omega, M)$ и $Q_{r,\gamma}^{**}(\Omega, M)$ совпадают.

Определение 2.6 [53]. Пусть $\Omega = [0, T]^l$, $l = 1, 2, \dots, 0 \le \gamma < 1$, $r = 1, 2, \dots$. Функция $f(t_1, \dots, t_l) \in B_{r,\gamma}^*(\Omega)$, если выполнены условия

$$\|\partial^{|v|} f(t_1, \dots, t_l)/\partial t_1^{v_1} \cdots \partial t_l^{v_l}\|_C \le A^{|v|}|v|^{|v|} \quad \text{при} \quad 0 \le |v| \le r,$$

$$|\partial^{|v|} f(t_1, \dots, t_l)/\partial t_1^{v_1} \cdots \partial t_l^{v_l}| \le A^{|v|}|v|^{|v|}/(\rho(t, \Gamma_0))^{|v|-r-1+\gamma}$$

при $r < |v| < \infty$,
где константа A не зависит от $|v|$.

Определение 2.7 [53]. Пусть $\Omega = [0, T]^l$, $l = 1, 2, \dots$, $r = 1, 2, \dots, 0 \le \gamma < 1$. Функция $f(t_1, \dots, t_l) \in B_{r,\gamma}^{**}(\Omega)$, если выполнены условия:

$$\|\partial^{|v|} f(t_1, \dots, t_l)/\partial t_1^{v_1} \cdots \partial t_l^{v_l}\|_C \le A^{|v|}|v|^{|v|} \quad \text{при} \quad 0 \le |v| \le r,$$

$$|\partial^{|v|} f(t_1, \dots, t_l)/\partial t_1^{v_1} \cdots \partial t_l^{v_l}| \le A^{|v|}|v|^{|v|}/(\rho(t, 0))^{|v|-r-1+\gamma}$$

при $r < |v| < \infty$,
где константа A не зависит от $|v|$.

Замечание. В одномерном случае ($l = 1$) классы $B_{r,\gamma}^*(\Omega)$ и $B_{r,\gamma}^{**}(\Omega)$ совпадают.

Определение 2.8. Пусть $\Omega = [0, T]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Функция $f(t_1, \dots, t_l)$ принадлежит классу $A(\Omega)$, если выполнены условия

$$|\partial^{|v|} f(t_1, \dots, t_l)/\partial t_1^{v_1} \cdots \partial t_l^{v_l}| \le M^{|v|}|v|^{|v|} \quad \text{при} \quad 0 \le |v| \le \infty,$$

где константа M не зависит от $|v|$.

3. Вспомогательные предложения и обозначения

В данном параграфе приводится ряд известных фактов из линейной алгебры и анализа, а также некоторые обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении книги.

На протяжении третьей и четвертой глав неоднократно используется теорема Адамара [65, стр. 406] об обратимости матриц.

Теорема Адамара. Если выполняется условие $|c_{jj}| > \sum_{k=0, k \ne j}^{n} |c_{jk}|$, то система линейных алгебраических уравнений $Cx = b$, где $C =$

$= \{c_{jk}\}_{j,k=\overline{0,n}}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, имеет единственное решение.

На протяжении книги используются следующие обозначения.

Через $[\alpha]$ обозначена целая часть числа α.

Через $S_\gamma x$ будем обозначать сингулярный интеграл

$$S_\gamma x = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

взятый по контуру γ.

Через $S_{12}x$ обозначен бисингулярный интеграл

$$S_{12}x = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} \frac{x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}.$$

Через $U_\gamma(h(t,\tau)x(\tau))$ обозначен интеграл

$$U_\gamma(h(t,\tau)x(\tau)) = \int\limits_\gamma h(t,\tau)x(\tau)d\tau.$$

Через $U_{12}(x)$ обозначен интеграл

$$U_{12}(x) = \int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2} x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Пусть $\Delta = [a,b]$, $\quad c \in [a,b]$. Через $T_r(\varphi,\Delta,c)$ обозначен отрезок ряда Тейлора

$$T_r(\varphi,\Delta,c) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1!}(t-c) + \cdots + \frac{\varphi^{(r)}(c)}{r!}(t-c)^r.$$

Пусть $\Delta = [a_1,b_1;a_2,b_2]$, $\quad c \in \Delta$. Через $T_r(\varphi,\Delta,c)$ обозначим отрезок ряда Тейлора $T_r(\varphi,\Delta,c) = \varphi(c) + \frac{1}{1!}d\varphi(c) + \cdots + \frac{1}{r!}d^r\varphi(c)$.

Обозначим через $D_r(t)$ периодическую, с периодом единица, функцию $D_r(t) = \frac{1}{2^r\pi^r}\sum\limits_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v^r}\cos(2\pi vt - \frac{\pi r}{2})$.

Через K_r обозначена константа Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \qquad r = 0,1,\ldots.$$

4. Элементы теории приближений

В данном параграфе приводится ряд известных фактов из теории приближений, которыми будем пользоваться на протяжении книги. Прежде всего напомним некоторые классические результаты конструктивной теории функций. При изложении этих результатов будем следовать монографиям [1], [78], [126].

4.1. Полиномы наилучшего приближения

Пусть $f(x)$– функция, определенная на сегменте $[a,b]$. Обозначим через H_n множество полиномов степени не выше n, т. е. полиномов вида $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, а через H_n^τ – множество тригонометрических полиномов вида $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Рассмотрим произвольный полином $P_n(x)$ и положим

$$\Delta(P_n) = \max_{x\in[a,b]} \mid P_n(x) - f(x) \mid .$$

Число $\Delta(P_n)$ называется *отклонением полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$*. Если будем изменять полином $P_n(x)$, заставляя его пробегать все множество H_n, то величина $\Delta(P_n)$ также будет изменяться, но так как она остается неотрицательной, то множество ее значений ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P_n\in H_n} \{\Delta(P_n)\}.$$

Величина $E_n(f)$ называется *наименьшим отклонением полиномов из H_n от $f(x)$ или наилучшим приближением к $f(x)$ полиномами из H_n.*

Теорема 4.1 (Теорема Бореля). Для всякой функции $f(x) \in C[a,b]$ в множестве H_n существует такой полином $P(x)$, что $\Delta(P) = E_n(f)$.

Следует отметить, что для всякой функции $f(x) \in C[a,b]$ в множестве H_n существует единственный полином наилучшего приближения. Это утверждение следует из теоремы Бореля и чебышевского альтернанса.

Приведем оценки наилучших приближений к $f(x)$ полиномами из H_n. Вначале дадим формулировки классических теорем Джексона.

Теорема 4.2. Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ справедлива оценка

$$E_n(f) \le 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 4.3. Пусть $f(x)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция, имеющая непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$. Если $\omega_r(\delta)$– модуль непрерывности r-й производной $f^{(r)}(x)$, то

$$E_n(f) \le \frac{12^{r+1}\omega_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}.$$

Если функция $f(x)$ приближается алгебраическими полиномами, то теоремы Джексона формулируются следующим образом.

Теорема 4.4. Если $f(x) \in C[a, b]$, то

$$E_n(f) \leq 12\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Теорема 4.5. Если $f(x) \in C[a, b]$ имеет p непрерывных производных, причем модуль непрерывности $f^{(p)} = \omega_p(\delta)$, то для $n > p$ справедлива оценка

$$E_n(f) \leq \frac{C_p(b-a)^p}{n^p}\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right),$$

где C_p зависит только от p.

Наряду с оценками наилучших приближений тригонометрическими и алгебраическими полиномами различных классов функций, т.е. прямыми теоремами конструктивной теории функций, нам понадобятся обратные теоремы конструктивной теории функций, позволяющие по числовым характеристикам $E_N(f)$ судить о классах функций, к которым принадлежат функции $f(x)$.

Предварительно приведем неравенства С.Н. Бернштейна и А.А. Маркова, которыми также будем неоднократно пользоваться в третьей и четвертой главах.

Теорема 4.6. Если

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) -$$

тригонометрический полином порядка n, то справедлива оценка

$$|T'(x)| \leq n \max |T(x)|.$$

Теорема 4.7. Если полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|P_n(x)| \leq M$, то на том же сегменте $|P_n(x)| \leq 2Mn^2/(b-a)$.

Обратные теоремы конструктивной теории функций принадлежат С.Н. Бернштейну и формулируются следующим образом [126].

Теорема 4.8. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и для любого n наилучшее приближение полиномами из H_n^T $E_n \leq An^{-\alpha}$. Тогда если $0 < \alpha < 1$, то $f(x) \in H_\alpha$, а если $\alpha = 1$, то $f(x) \in Z$.

Теорема 4.9. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и $E_n -$ ее наилучшее приближение полиномами из H_n^T. Если $E_n \leq \frac{A}{n^{r+\alpha}}$, где $r-$ натуральное число, а $0 < \alpha \leq 1$, то у функции $f(x)$ существуют непрерывные производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)$, причем $f^{(r)} \in H_\alpha$, если $\alpha < 1$, и $f^{(r)} \in Z$, если $\alpha = 1$.

Напомним, что через Z обозначен класс функций Зигмунда, определенный следующим соотношением: для модуля непрерывности $\omega(\delta)$ справедливо неравенство $\omega(\delta) \leq A\delta(1 + |\ln\delta|)$, где A не зависит от δ.

Изложенные выше результаты принадлежат в основном классикам конструктивной теории функций: П.Л. Чебышеву, С.Н. Бернштейну, Д. Джексону, и относятся к первому периоду в теории приближений. Как уже отмечалось выше, их подробное изложение имеется в [1], [78], [126]. В 50-е - 70-е гг. прошлого столетия в конструктивной теории функций были получены новые результаты, многие из которых являются неулучшаемыми. Не имея возможности остановиться на этих результатах, приведем теорему типа Джексона об оценках наилучших приближений.

Теорема 4.10 [99, с.237]. Для любой функции $f \in C, f \not\equiv \mathrm{const}$, справедливы неравенства $E_n(f)_c < \omega(f, \frac{\pi}{n}), n = 1, 2, \dots$, причем не зависящая от f и от n константа 1 перед $\omega(f, \frac{\pi}{n})$ не может быть уменьшена.

Современное состояние конструктивной теории функций и точные оценки приближений полиномами, отрезками рядов и сплайнами изложены в монографиях и обзорах [4], [99] $-$ [101], [148], [153].

4.2. Элементы теории сплайнов

На протяжении всей книги будут неоднократно использоваться методы сплайн-интерполяции и сплайн-коллокации. Напомним определения сплайнов, необходимые в дальнейшем.

Функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется сплайном порядка m $(m = 0, 1, \cdots)$ с узлами t_k, $k = 1, 2, \dots, N$, $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < b$, если в каждом сегменте $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_N, b]$ функция $f(x)$ является алгебраическим полиномом степени m и в каждой из точек t_k, $k = 1, 2, \dots, N$, некоторая производная $f^{(v)}(x)$, $0 \leq v \leq m$, имеет разрыв.

Говорят, что сплайн $f(x)$ порядка m имеет дефект r_k $(1 \leq r_k \leq$ $\leq m)$ в узле x_k, $k = 1, 2, \dots, N$, если в точке x_k непрерывны функции $f(x)$, $f'(x), \dots, f^{(m-r_k)}(x)$, а производная $f^{(m-r_k+1)}(x)$ в точке x_k терпит разрыв.

Число $r = \max\limits_{1 \leq k \leq N} r_k$ называется дефектом сплайна.

Будем говорить, что в узле x_k, $k = 1, 2, \dots, N$, сплайн $f(x)$ имеет дефект $m + 1$, если в этом узле функция $f(x)$ имеет разрыв непрерывности. В этом случае будем говорить, что сплайн $f(x)$ имеет дефект $m + 1$.

5. Элементы функционального анализа

В параграфе приводятся сведения из функционального анализа, используемые во второй, третьей и четвертой главах. При изложении этого материала мы следуем книге [117].

5.1. Нормирование пространства

Рассмотрим некоторое множество E, в котором введены две операции: сложение элементов и умножение на число, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

3) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x-$ два закона дистрибутивности;

4) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (ассоциативность умножения);

5) в E существует нулевой элемент 0 , такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in E$;

6) для каждого элемента $x \in E$ существует однозначно определенный элемент того же множества $(-x)$, такой, что $x + (-x) = 0$.

Элемент 0 называется нулевым элементом или нулем множества E, элемент $-x$ называется элементом, противоположным элементу x.

Множество E, удовлетворяющее перечисленным свойствам, называется линейным пространством (вещественным, если числа λ вещественные, или комплексным, если λ комплексные).

Предположим, что каждому $x \in E$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x), удовлетворяющее условиям:

а) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

б) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (однородность нормы);

в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство, в котором введено понятие нормы, называется линейным нормированным пространством.

Линейное нормированное пространство E называется полным или банаховым пространством, если из того, что $\|x_n - x_m\|_E \to 0$ при $n, m \to \infty$, следует сходимость последовательности x_k к некоторому элементу $x \in E$ по норме пространства E, т.е. $\lim_{k\to\infty} \| x - x_k \|_E = 0$.

Банаховы пространства будем обозначать буквой B.

Полное линейное нормированное пространство называется гильбертовым пространством (H-пространством), если в нем введено скалярное произведение $(.,.)$, обладающее свойствами:

а) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (в частности, $(x, x)-$ вещественное число);

б) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;

в) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого комплексного числа λ;

г) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

При этом скалярное произведение связано с нормой равенством $(x, x) = \| x \|^2$.

5.2. Линейные операторы

Пусть B_1 и B_2– банаховы пространства. Отображение A из B_1 в B_2 называется линейным оператором, если $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для любых чисел α, β и любых элементов $x, y \in B_1$.

Оператор A называется непрерывным, если он каждую сходящуюся (по норме в B_1) последовательность элементов (x_n) переводит в сходящуюся (по норме в B_2) последовательность элементов (Ax_n).

Оператор A называется ограниченным, если можно указать такое положительное число K, что для $x \in B$ $\| Ax \| \leq K \| x \|$. Наименьшее из значений K, при которых выполняется предыдущее неравенство, называется нормой оператора A и обозначается $\| A \|$. Отметим, что $\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|$.

Множество линейных ограниченных операторов , действующих из B пространства X в B пространства Y, обозначается через $B[X, Y]$ или $[X, Y]$.

Замкнутое линейное подмножество банахова пространства называется его подпространством. Говорят, что пространство B распадается в прямую сумму подпространств B_1 и B_2, $B = B_1 \otimes B_2$, если каждый элемент $x \in B$ допускает единственное представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$. Каждое из подпространств B_1, B_2 называется прямым дополнением друг друга.

В пространстве B можно ввести следующую норму: $\| x \| = \| x_1 \|$ +
$+ \| x_2 \|$, где $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2,\ B = B_1 \otimes B_2$. Введенная таким образом норма называется максимальной.

При исследовании линейных операторов в гильбертовых пространствах часто наряду с оператором A рассматривают его действительную и мнимые части $A_R = ReA = (A + A^*)/2$ и $A_j = ImA = (A - A^*)/2$. Здесь через A^* обозначен оператор, сопряженный с A. В случае если A– матрица, то A^*– матрица, комплексно сопряженная с A. Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$.

Пусть B– комплексное банахово пространство. Точка λ комплексной плоскости называется регулярной точкой оператора A, если существует оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек открыто. Его дополнение называется спектром оператора A и обозначается символом $\sigma(A)$. Спектр $\sigma(A)$ всегда замкнут, непуст и лежит в круге $\mid \sigma(A) \mid \leq \| A \|$.

Комплексное число λ называется собственным значением оператора A в комплексном банаховом пространстве B, если существует такой $x \in B(\| x \| \neq 0)$, что $Ax = \lambda x$. Элемент x, удовлетворяющий этому равенству, называется собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ.

Множество $E \subset X$ называется множеством первой категории, если E можно представить в виде объединения счетного множества нигде не плотных множеств.

Множество $E \subset X$, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории (в X).

Пусть $X-$ нормированное пространство, X_0- его подпространство.

Объединим элементы из X в классы, относя два элемента x_1 и x_2 в один класс, если $x_1 - x_2 \in X_0$. При этом, очевидно, различные классы не содержат общих элементов и каждый элемент $x \in X$ входит в один и только один класс. Пусть $\overline{x}-$ один из классов и $x \in \overline{x}$. Тогда $\overline{x} = x + X_0$.

В множестве X/X_0 всех классов можно ввести арифметические операции, полагая $\overline{x} + \overline{y} = x + y + X_0$, $\lambda \overline{x} = \lambda x + X_0$.

Эти определения не зависят от выбора элементов x и $y-$ представителей классов $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Поэтому X/X_0 является линейным пространством, которое называется фактор-пространством.

Напомним несколько утверждений из функционального анализа, которыми будем неоднократно пользоваться.

Теорема 5.3 (Банах) [117]. Пусть $X - B-$ пространство и $U \in B[X, X]$. Тогда если

$$\| U \| \leq q < 1, \tag{5.1}$$

то оператор $I - U$ имеет непрерывный обратный, причем

$$\| (I - U)^{-1} \| \leq \frac{1}{1-q}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Обозначим через V сумму ряда

$$V = I + U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots \tag{5.3}$$

Так как $\| U \| < 1$, то ряд (5.3) мажорируется сходящимся числовым рядом $1 + \| U \| + \| U \|^2 + \ldots \| U \|^n + \ldots$.

Так как пространство X полно, то ряд (5.3) сходится. Нетрудно видеть, что $V(I - U) = (I + U + \ldots + U^n + \ldots)(I - U) =$
$= (I + U + \ldots + U^n + \ldots) - (U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots) = I.$

Аналогично, $(I - U)V = I$. Следовательно, $V = (I - U)^{-1}$.

Оценим норму V

$$\| V \| \leq \| I \| + \| U \| + \ldots + \| U^n \| + \ldots \leq$$

$$\leq 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \frac{1}{1-q},$$

что дает оценку (5.2).

Теорема доказана.

Теорема 5.4 [117]. Пусть $U_0 \in B[X, Y]$, где X и Y два B-пространства, и пусть существует $U_0^{-1} \in B[Y, X]$. Тогда если оператор $U \in B[X,Y]$ удовлетворяет условию $\| U \| < \| U_0^{-1} \|^{-1}$, то оператор $V = U_0 + U$ имеет непрерывный обратный V^{-1}, причем

$$\| V^{-1} \| \leq \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} U \|} \leq \frac{\| U_0^{-1} \|}{1 - \| U_0^{-1} \| \| U \|}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $W = U_0^{-1} V = I + U_0^{-1} U$. Так как $\| U_0^{-1} U \| \leq \| U_0^{-1} \| \| U \| < 1$, то по теореме Банаха оператор W имеет непрерывный обратный W^{-1}. При этом

$$\| W^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| U_0^{-1} U \|} \leq \frac{1}{1 - \| U_0^{-1} \| \| U \|}. \tag{5.5}$$

Имеем далее $U_0^{-1} V W^{-1} = I$, откуда $V W^{-1} = U_0$ и, следовательно, $V W^{-1} U_0^{-1} = I$. С другой стороны, $W^{-1} U_0^{-1} V = I$.

Из последних двух равенств следует, что оператор $W^{-1} U_0^{-1}$ является непрерывным обратным по отношению к оператору V.

Из равенства $V^{-1} = W^{-1} U_0^{-1}$ и оценки (5.5) получаем оценку (5.4).

Теорема доказана.

5.3. Дифференцирование в нормированных пространствах

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства, $y = f(x)$ – оператор, определенный в X с областью значений в Y.

Производная Фреше. Пусть h – произвольный элемент пространства X, и предположим, что существует линейный оператор $A \in B[X,Y]$ (вообще зависящий от x), такой, что $f(x+h) - f(x) = Ah + a(x,h)$, где

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|a(x,h)\|}{\|h\|} = 0.$$

В этом случае Ah называется сильным дифференциалом или дифференциалом Фреше оператора $f(x)$ в точке x, соответствующим приращению h аргумента, и обозначается $df(x,h)$.

Линейный оператор A, вообще зависящий от x, обозначается $f'(x)$ и называется сильной производной или производной Фреше.

Тогда $df(x,h) = f'(x)h$ и $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|)$.

Слабый дифференциал (дифференциал Гато). Слабым дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называют выражение

$$Df(x,h) = \frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

в предположении, что предел, стоящий в правой части равенства и понимаемый в смысле сходимости по норме, существует.

Теорема 5.5 [117]. Если существует сильный дифференциал $df(x, h)$, то существует и слабый $Df(x, h)$ и $df(x, h) = Df(x, h)$.

В определение дифференциала Гато не входит требование линейности. Однако если дифференциал $Df(x, h)$ линейный, то $Df(x, h) =$
$= f'_c(x)h$ и функция $f'_c(x)$ называется слабой производной или производной Гато оператора $f(x)$.

6. Общая теория приближенных методов

Для приближенного решения задач математической физики, дифференциальных и интегральных уравнений придумано и используется большое число методов, основанных на различных идеях.

Для суждения об эффективности и обоснованности используемых вычислительных методов необходимо их теоретическое исследование, при котором, как отмечается в [91], в порядке возрастающей трудности встают три следующих вопроса:

1) установление осуществимости и сходимости алгоритма;

2) исследование быстроты сходимости;

3) эффективная оценка погрешности.

В последнее время в этот круг включаются также следующие вопросы:

4) исследование сложности алгоритма;

5) оценка объема памяти, необходимого для реализации алгоритма.

Здесь мы не касаемся программной реализации алгоритма.

Общая теория приближенных методов анализа была создана [90] Л. В. Канторовичем в 1948 г. Начиная с этого времени, во многих работах, связанных с обоснованием приближенных методов решения различных задач математической физики, используют общую теорию приближенных методов.

6.1. Общая теория приближенных методов для уравнений второго рода

В этом пункте , следуя [91] , изложим общую теорию приближенных методов для линейных уравнений второго рода.

Пусть $X-$ полное нормированное пространство, X_n- его подпространство. Обозначим через P_n проектор из X на X_n, т.е. линейный оператор, удовлетворяющий следующим условиям: $P_n(X) = X_n$,
$P_n^2 = P_n$. Оператор P_n ставит каждому элементу $x \in X$ в соответствие элемент $x_n \in X_n$, причем $P_n x_n = x_n$.

Рассмотрим точное уравнение

$$Kx \equiv x + Hx = f, \quad K \in B[X, X], \tag{6.1}$$

в пространстве X и последовательность приближенных уравнений

$$K_n x_n \equiv x_n + H_n x_n = f_n, \quad K_n \in B[X_n, X_n], \tag{6.2}$$

в подпространствах X_n.

Будем считать, что пространства X и X_n и операторы H и H_n связаны следующими условиями:

I. Условие близости операторов H и H_n. Для любого $x_n \in X_n$ справедливо неравенство

$$\| P_n H x_n - H_n x_n \| \leq \varepsilon_1(n) \| x_n \| .$$

II. Условие аппроксимации элементов Hx элементами из X_n. Для любого $x \in X$ найдется элемент $x_n \in X_n$, такой, что

$$\| Hx - x_n \| \leq \varepsilon_2(n) \| x \| .$$

III. Условие аппроксимации свободного члена точного уравнения. Существует элемент $f_n \in X_n$, такой, что

$$\| f - f_n \| \leq \varepsilon_3(n)(f) \| f \| .$$

Запись $\varepsilon_3(f)$ подчеркивает, что оценка в III неравномерна относительно пространства X.

Параметр n в функциях $\varepsilon_1(n), \varepsilon_2(n), \varepsilon_3(n)$ для простоты обозначений может быть опущен.

Теорема 6.1 [91]. Пусть выполнены условия I и II, оператор K непрерывно обратим. Тогда если

$$q = [\varepsilon_1 + \| I - P_n \| \varepsilon_2] \| K^{-1} \| < 1, \tag{6.3}$$

то оператор K_n также имеет непрерывный обратный K_n^{-1}. При этом

$$\| K_n^{-1} \| \leq \frac{\| K^{-1} \|}{1 - q}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на двукратном применении теоремы Банаха. Сначала теорема Банаха применяется к оператору $K = I + H$ в пространстве X, а затем к оператору $\overline{K} = I + P_n H$ в подпространстве X_N.

Рассмотрим оператор $\overline{K} = I + P_n H$. Согласно условию II для произвольного элемента $x \in X$ найдется такой элемент $x_n \in X_n$, что $\| Hx - x_n \| \leq \varepsilon_2 \| x \|$. Тогда

$$\| (K - \overline{K})x \| = \| Hx - P_n Hx \| = \| Hx - x_n + P_n x_n - P_n H x_n \| =$$

$$=\| (I-P_n)(Hx-x_n) \| \le \| I-P_n \| \varepsilon_2 \| x \| .$$

Так как $x-$ произвольный элемент из X, то тем самым доказано, что $\| K-\overline{K} \| \le \| I-P_n \| \varepsilon_2$.

Оператор $\overline{K}$ можно представить в виде

$$\overline{K} = K(I-K^{-1}(K-\overline{K})). \tag{6.5}$$

Воспользовавшись полученной выше оценкой для оператора $(K-\overline{K})$, имеем $\| K^{-1}(K-\overline{K}) \| \le \| I-P_n \| \varepsilon_2 \| K^{-1} \| \le q < 1$.

Из теоремы Банаха следует существование обратного оператора $(I-K^{-1}(K-\overline{K}))^{-1}$ с нормой

$$\| (I-K^{-1}(K-\overline{K}))^{-1} \| \le \left(1- \| I-P_n \| \varepsilon_2 \| K^{-1} \|\right)^{-1}.$$

Из формулы (6.5) следует, что оператор $\overline{K}$ имеет линейный обратный оператор $\overline{K}^{-1} = (I-K^{-1}(K-\overline{K}))^{-1}K^{-1}$.

Следовательно,

$$\| \overline{K}^{-1} \| \le \frac{\| K^{-1} \|}{1- \| I-P_n \| \varepsilon_2 \| K^{-1} \|}. \tag{6.6}$$

В пространстве X_n рассмотрим оператор $\overline{K}^{*}x_n = x_n + P_nHx_n$. Очевидно, для любого $x_n \in X_n$ $\overline{K}^{*}x_n = \overline{K}x_n$.

Нетрудно видеть, что если $f_n \in X_n$, то $\overline{K}^{-1}f_n \in X_n$. Действительно, если $x^1 = \overline{K}^{-1}f_n$, то $x^1 = f_n - P_nHx^1 \in X_n$. Поэтому оператор $\overline{K}^{*}$ имеет непрерывный обратный оператор, совпадающий с $\overline{K}^{-1}$ на X_n, и

$$\| \overline{K}^{*-1} \| \le \| \overline{K}^{-1} \| . \tag{6.7}$$

Оценим норму разности $\|K_n - \overline{K}^{*}\|$. По условию I для любого $x_n \in X_n$

$$\| \overline{K}^{*}x_n - K_nx_n \| = \| P_nHx_n - H_nx_n \| \le \varepsilon_1 \| x_n \| \tag{6.8}$$

и

$$\| \overline{K}^{*} - K_n \| \le \varepsilon_1. \tag{6.9}$$

Из неравенств (6.7), (6.8) и (6.9) следует, что

$$\| \overline{K}^{*-1} \| \| K_n - \overline{K}^{*} \| \le \frac{\| K^{-1} \| \varepsilon_1}{1- \| I-P_n \| \varepsilon_2 \| K^{-1} \|} =$$

$$= 1 - \frac{1-q}{1- \| I-P_n \| \varepsilon_2 \| K^{-1} \|} < 1.$$

Записывая оператор K_n в виде $K_n = \overline{K}^*(I - \overline{K}^{*-1}(\overline{K}^* - K_n))$ и применяя теорему Банаха в подпространстве X_N, доказываем существование обратного оператора K_n^{-1}. Оценим его норму. Очевидно,

$$\| K_n^{-1} \| \leq \frac{\| \overline{K}^{*-1} \|}{1 - \| \overline{K}^{*-1} \| \| K_n - \overline{K}^* \|} \leq$$

$$\leq \frac{(1 - \| I - P_n \| \varepsilon_2 \| K^{-1} \|) \| \overline{K}^{-1} \|}{1-q} \leq \frac{\| K^{-1} \|}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Теорема 6.2 [91]. Пусть выполнены условия I, II, III, существует непрерывный оператор K_n^{-1} и уравнение (6.1) имеет решение x^*. Тогда $\|x^* - x_n^*\| \leq 2\varepsilon_1(n)\|K_n^{-1}\| + (\varepsilon_2(n) + \|K\|)(1 + \|K_n^{-1}P_nK\|)$, где x_n^* - решение уравнения (6.2).

Доказательство теоремы приведено в [91, с. 519-520].

Отметим, что в теореме 6.2 не требуется существования оператора K^{-1}. Если потребовать существование оператора K^{-1}, то оценку близости можно получить из более простых соображений.

Теорема 6.2.$'$ Пусть оператор K непрерывно обратим, выполнены условия I,II,III и условия теоремы 6.1. Тогда $\|x^* - x_n^*\| \leq \|K^{-1}\|\varepsilon_3+$
$+\|K^{-1}\|^2(\varepsilon_2(1+\|P_n\|)+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)\|f\|/(1-q)$, где x^* и x_n^*— решения уравнений (6.1) и (6.2), соответственно, q определено в теореме 6.1.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 6.1, то, начиная с некоторого N, существуют непрерывные операторы K_n^{-1} $(n \geq N)$. Следовательно,

$$\|x^* - x_n^*\| = \|K^{-1}f - K_n^{-1}f_n\| \leq \|K^{-1}(f - f_n)\| + \|K^{-1}f_n - K_n^{-1}f_n\| =$$

$$= \|K^{-1}\|\|f - f_n\| + \|K^{-1}(K_n - K)K_n^{-1}f_n\| \leq$$

$$\leq \|K^{-1}\|\varepsilon_3(n) + \|K^{-1}\|\|K_n^{-1}\|\|K - K_n\|_{X_n}\|f_n\| =$$

$$= \|K^{-1}\|\varepsilon_3(n) + \|K^{-1}\|\|K_n^{-1}\|\|H - P_nH + P_nH - H_n\|_{X_n}\|f_n\| \leq$$

$$\leq \|K^{-1}\|\varepsilon_3(n) + \|K^{-1}\|\|K_n^{-1}\|(\varepsilon_2(n) + \varepsilon_2(n)\|P_n\| + \varepsilon_1(n))\|f_n\| \leq$$

$$\leq \|K^{-1}\|\varepsilon_3(n) + \|K^{-1}\|^2(\varepsilon_2(n)(1+\|P_n\|)+\varepsilon_1(n))(1+\varepsilon_3(n))\|f\|/(1-q).$$

Теорема доказана.

6.2. Общая теория приближенных методов для обратимых справа операторов

Лемма 6.1 [90]. Пусть $V-$ линейная операция из B-пространства X в B-пространство Y, и пусть для каждого $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что $\| V(x) - y \| \leq q \| y \|; \quad \| x \| \leq N \| y \|$, где $q < 1$ и $N-$ постоянные. Тогда уравнение

$$V(x) = y \tag{6.10}$$

при любом $y \in Y$ имеет решение $x \in X$, удовлетворяющее неравенству

$$\| x \| \leq \frac{N}{1-q} \| y \| . \tag{6.11}$$

Доказательство. Точное решение уравнения (6.10) построим методом исчерпывания.

Положим $y_1 = y$. По условию найдется такое $x_1 \in X$, что

$$\| V(x_1) - y_1 \| \leq q \| y_1 \|; \quad \| x_1 \| \leq N \| y_1 \| .$$

Обозначим $y_2 = y_1 - V(x_1)$. По y_2, опять используя условие, найдем x_2 так, что

$$\| V(x_2) - y_2 \| \leq q \| y_2 \| \leq q^2 \| y_1 \|; \quad \| x_2 \| \leq N \| y_2 \| \leq Nq \|y_1\|.$$

Продолжая этот процесс, построим последовательности $\{y_n\}$ и $\{x_n\}$, такие, что

$$y_{k+1} = y_k - V(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.12}$$

$$\| y_k \| \leq q^{k-1} \| y_1 \|, \quad \| x_k \| \leq Nq^{k-1} \| y_1 \| . \tag{6.13}$$

Суммируя равенства (6.12), получаем:

$$y_{n+1} = y_1 - V(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), n = 1, 2, \ldots . \tag{6.14}$$

Ряд $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, очевидно, сходится. Обозначая его сумму через x, имеем:

$$\| x \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \| \leq N \| y \| \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{N}{1-q} \| y \| .$$

С другой стороны, поскольку $\lim y_n = 0$, переход к пределу в (6.14) дает $0 = y - V(x)$, т.е. $x-$ решение уравнения (6.10), удовлетворяющее требуемому условию.

Лемма доказана.

Пусть X и Y $-$ B-пространства, X_n и Y_n- соответственно, их подпространства. Пусть P_n- линейный оператор, проектирующий Y на Y_n.

Рассмотрим линейные уравнения: точное

$$Kx = y, \quad K \in B[X, Y] \tag{6.15}$$

и последовательность приближенных

$$K_n x_n = y_n, \quad K_n \in B[X_n, Y_n]. \tag{6.16}$$

На указанные операторы и пространства наложим следующие условия:

I. Для любого $x_n \in X_n$ $\| K_n x_n - P_n K x_n \| \le \varepsilon_1(n) \| x_n \|$.

II. Если $x_0 -$ решение уравнения $Kx = y_n$, то существует такое $x_n^0 \in X_n$, что $\| x_0 - x_n^0 \| \le \varepsilon_2(n) \| x_0 \|$.

Для простоты обозначений будем опускать индекс n.

Теорема 6.3 [12], [15]. Пусть уравнение (6.15) разрешимо при любой правой части $y \in Y$, выполнены условия I, II, причем $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1(n) = 0, \lim_{n\to\infty} \varepsilon_2(n) \| P_n \| = 0$. Тогда существует такое N, что при $n \ge N$ уравнение (6.16) имеет решение x_n^* при любой правой части, причем

$$\| x_n^* \| \le M \| y_n \| /(1 - q), \tag{6.17}$$

где $M = (1 + \varepsilon_2) 2 \| \overline{K}^{-1} \|$, $q = 2[\varepsilon_1(1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \| P_n K \|] \| \overline{K}^{-1} \|$, $\overline{K} -$ оператор, отображающий фактор-пространство X/X_0 на Y (через X_0 обозначено пространство нулей оператора K).

Доказательство. Так как оператор K отображает X на Y, $Y - B$-пространство и, следовательно [117], множество второй категории в себе, то по теореме Банаха [117] оператор K осуществляет гомеоморфизм пространства X на Y. Поэтому [117] существует такое решение x_0 уравнения $Kx = y_n$, что $Kx_0 = y_n$ и $\| x_0 \| \le$ $\le 2 \| \overline{K}^{-1} \| \| y_n \|$. Из условия II следует существование такого $x_n^0 \in X_n$, что $\| x_n^0 \| \le (1 + \varepsilon_2) 2 \| \overline{K}^{-1} \| \| y_n \|$.

Нетрудно видеть, что

$$\| K_n x_n^0 - y_n \| \le 2[\varepsilon_1(1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \| P_n K \|] \| \overline{K}^{-1} \| \| y_n \| = q \| y_n \| . \tag{6.18}$$

В самом деле

$$\| K_n x_n^0 - y_n \| = \| K_n x_n^0 - P_n K x_n^0 + P_n K x_n^0 - P_n K x_0 \| \le$$
$$\le \varepsilon_1 \| x_n^0 \| + \| P_n K \| \| x_n^0 - x_0 \| . \tag{6.19}$$

Из (6.19) следует справедливость неравенства (6.18).

Так как $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1(n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_2(n) \| P_n \| = 0$, то при достаточно больших n $q < 1$ и выполняются условия леммы 6.1, из которой следуют утверждения теоремы.

Замечание 1. Теорема 6.3 приведена в [12] без доказательства. Подробное доказательство содержится в статье [15], принятой к печати, но до сих пор не опубликованной.

Замечание 2. В работе [23] общая теория приближенных методов распространена на линейные уравнения с неограниченными операторами.

Исследуем применимость общей теории приближенных методов к приближенному решению операторных уравнений первого рода.

Рассмотрим уравнения: точное

$$Kx = f, \quad K \in B[X, X] \tag{6.20}$$

и последовательность приближенных

$$K_n x_n = f_n = P_n f, \quad K_n \in B[X_n, X_n]. \tag{6.21}$$

При исследовании уравнений (6.20) и (6.21) соблюдаются следующие условия:

I. Для любого $x \in X$ $\|Kx - P_n Kx\| \leq \varepsilon_1(n)\|x\|$.

II. Для любого $x_n \in X_n$ $\|P_n K x_n - K_n x_n\| \leq \varepsilon_2(n)\|x_n\|$.

III. Если x^*- решение уравнения (6.20), то существует такое $x_n \in$
$\in X_n$, что $\|x^* - x_n\| \leq \varepsilon_3(n)\|x^*\|$.

Выполнение последнего условия на практике затруднительно. Ниже доказывается утверждение о связи между разрешимостью уравнений (6.20) и (6.21), в котором удалось отказаться от проверки условия III.

Предположим, что оператор K непрерывно обратим. В этом случае решение уравнения (6.20) определяется формулой

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{F(K)} \lambda^{-1} R(\lambda, K) d\lambda f,$$

где $R(\lambda, K) = (\lambda I - K)^{-1}$, $F(K)-$ контур, ограничивающий область, содержащую спектр оператора K и не содержащую начало координат.

При этом предполагается, что контур $F(K)$ не содержит элементов спектра оператора K.

Введем уравнение

$$\overline{K}_n x_n \equiv P_n K x_n = f_n = P_n f. \tag{6.22}$$

Теорема 6.4. Пусть $K^{-1} \in B[X, X]$ и выполнены условия I и II и, кроме того, $\|R(\lambda, K)\| \leq C = \mathrm{const}$ для $\forall \lambda \in F(K)$. Тогда при n таких, что выполнено неравенство $q = A\varepsilon_2(n)(1 + (\varepsilon_1(n)) < 1$, уравнение (6.21) однозначно разрешимо при любой правой части и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \le A\left(\varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(n) + \|f - f_n\|\right)$, где x^* и x_n^*– решения уравнений (6.20) и (6.21), соответственно.

Доказательство. По обобщенной теореме Банаха при n, таких, что $q = O(\varepsilon_1(n)) < 1$, операторы $R(\lambda, \overline{K}_n)$ будут непрерывно обратимы при всех $\lambda \in F(K)$. При этих же значениях n из общей теории приближенных методов в проблеме собственных значений [102] следует, что спектры операторов $\overline{K}_n$ находятся в области, ограниченной контуром $F(K)$. Следовательно, решение уравнения (6.22) имеет вид

$$\overline{x}_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{F(K)} \lambda^{-1} R(\lambda, \overline{K}_n) d\lambda f_n.$$

Зафиксируем произвольное λ и рассмотрим уравнение

$$\lambda x + Kx = f. \tag{6.23}$$

Применим к этому уравнению общую теорию приближенных методов (это возможно, так как контур $F(K)$ не проходит через начало координат). Для этого представим уравнение (6.23) в виде

$$x + \frac{1}{\lambda} Kx = \frac{1}{\lambda} f. \tag{6.24}$$

Так как $\max_{\lambda \in F(K)} \left|\frac{1}{\lambda}\right| \le N$, то условия I и II общей теории приближенных методов для уравнений второго рода выполняются для уравнения (6.24) с константами $\varepsilon_1^* = N\varepsilon_1$, $\varepsilon_2^* = N\varepsilon_2$.

Из теоремы Банаха следует, что при n таких, что $q = O\left(\varepsilon_1(n)\right) <$
< 1, уравнение $x + \lambda^{-1}\bar{K}_n x = \lambda^{-1} f$ и, следовательно, уравнение (6.22) имеет единственное решение $\overline{x}_n^*$ и справедлива оценка $\|x^* - \overline{x}_n^*\| =$
$= O\left(\varepsilon_1(n)\right)$, где x^*– решение уравнения (6.20). Аналогичным образом исследуется связь между уравнениями (6.21) и (6.22). Теорема доказана.

При обосновании приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений понадобится модификация общей теории приближенных методов.

6.3. Приближенное решение уравнений, сводящихся к уравнениям второго рода

Пусть X и Y – банаховы пространства, X_n и Y_n – их подпространства, P_n– оператор, проектирующий Y на Y_n. Рассмотрим точное уравнение

$$Lx \equiv Gx + Tx = f, \quad L \in B[X, Y],$$

и аппроксимирующую его последовательность уравнений

$$L_n x_n \equiv G_n x_n + T_n x_n = f_n, \quad L_n \in B[X_n, Y_n].$$

На оператор G налагаются дополнительные условия: оператор $G \in$
$\in B[X, Y]$ непрерывно обратим, т.е. существует ограниченный оператор $G^{-1} \in B[Y, X]$; оператор G взаимно однозначно отображает подпространство X_n на подпространство Y_n, т.е. $G \in B[X_n, Y_n]$ и $G^{-1} \in$
$\in B[Y_n, X_n]$.

По аналогии с условиями I – III вводятся условия Ia – IIIa:

Ia) для любого $x_n \in X_n$ $\|P_n T x_n - T_n x_n\| \leq \eta_1(n)\|x_n\|$;

IIa) для любого $x \in X$ существует такое $y_n \in Y_n$, что $\|Tx - y_n\| \leq$
$\leq \eta_2(n)\|x\|$;

IIIa) для всех $y \in Y$ $\|y - y_n\| \leq \eta_3(n)\|y\|$.

При сделанных относительно оператора G предположениях уравнения $Lx = f$ и $L_n x_n = f_n$ сводятся к уравнениям второго рода. Для этого достаточно воздействовать на уравнение $Lx = f$ и $L_n x = f_n$ оператором G^{-1}. В результате приходим к уравнениям второго рода

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}f \tag{6.25}$$

и

$$K_n x_n \equiv x_n + G^{-1}T_n x_n = G^{-1}f_n. \tag{6.26}$$

Для доказательства разрешимости уравнений (6.25) и (6.26) достаточно воспользоваться результатами раздела 6.1. Для этого нужно проверить выполнимость условий I – III. Легко установить связь между условиями Ia – IIIa и I – III. Из этой связи и теорем 6.1 и 6.2 вытекают утверждения.

Теорема 6.5 [91]. Если выполнены условия Ia, IIa, оператор L непрерывно обратим и $q = (\eta_1(n) + \|I - P_n\|\eta_2(n))\|L^{-1}\| < 1$, то оператор L_n непрерывно обратим и $\|L_n^{-1}\| \leq \|L^{-1}\|/(1-q)$.

Теорема 6.6 [91]. Если выполнены условия Ia, IIa, IIIa, существует непрерывный оператор L_n^{-1} и уравнение (6.25) имеет решение x^*, то $\|x^* - x_n^*\| \leq 2\eta_1(n)\|L_n^{-1}\| + (\eta_2(n) + \eta_3(n)\|L\|)(1 + \|L_n^{-1}P_n L\|)$,
где x_n^*– решение уравнения (6.26).

6.4. Метод Ньютона – Канторовича

Пусть X, Y – банаховы пространства.

Рассмотрим уравнение

$$Kx = 0, \tag{6.27}$$

где $K-$ нелинейный оператор, действующий из X в Y.

Будем считать, что оператор K имеет в некоторой окрестности начальной точки x_0 производную Гато, для которой существует обратный оператор $[K'(x)]^{-1}$.

Решение уравнения (6.27) будем искать в виде итерационных процессов: основного

$$x_{n+1} = x_n - [K'(x_n)]^{-1}K(x_n) \tag{6.28}$$

и модифицированного

$$x_{n+1} = x_n - [K'(x_0)]^{-1}K(x_n). \tag{6.29}$$

Лемма 6.1. Пусть нелинейный оператор K в некоторой сфере $S(x_0, r)$, $\|x - x_0\| \le r$, имеет производную Гато, а U – линейный оператор. Тогда для любых $x_1, x_2 \in S(x_0, r)$ выполняется неравенство

$$\|K(x_2)-K(x_1)-U(x_2-x_1)\| \le \|K'(x_1+\tau(x_2-x_1))-U\|\cdot\|x_2-x_1\|, \tag{6.30}$$

где $0 \le \tau \le 1$.

Доказательство. Известно [117], что если K имеет производную Гато, то

$$\|K(x_2)-K(x_1)\| \le \|K'(x_1+\tau(x_2-x_1))(x_2-x_1)\| \quad (0 \le \tau \le 1). \tag{6.31}$$

Рассмотрим оператор $P = K - U$. Подставляя P в предыдущую формулу и пользуясь линейностью оператора U и существованием производной Гато оператора K, получаем (6.31).

При доказательстве сходимости основного метода нам понадобится следующее утверждение, принадлежащее Л. С. Раковщику.

Лемма 6.2 [138]. Пусть X и $Y-$ пространства Банаха, $A, B \in$ $\in B[X, Y]$. Если A имеет ограниченный правый обратный оператор A_r^{-1} и если оператор $B \in B[X, Y]$ удовлетворяет условию $\|A - B\|\ \|A_r^{-1}\| < 1$, то он также имеет ограниченный правый обратный оператор B_r^{-1} и $\|B_r^{-1}\| \le \|A_r^{-1}\|[1 - \|(A - B)A_r^{-1}\|]^{-1}$.

Доказательство. Лемма немедленно следует из соотношений

$$BA_r^{-1}[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} = [A + (B - A)]A_r^{-1}[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} =$$

$$= [I + (B - A)A_r^{-1}][I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} = I.$$

Здесь

$$[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [(B - A)A_r^{-1}]^k.$$

Следовательно, $B_r^{-1} = A_r^{-1}[I + (B - A)A_r^{-1}]^{-1}$, и имеет место приведенная в лемме оценка.

Докажем сходимость основного метода Ньютона - Канторовича.

Теорема 6.7 [12]. Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть выполнены условия:

1) $\|K(x_0)\| \equiv \eta_0$;

2) оператор K имеет производную Гато в окрестности точки x_0, и существует правый обратный оператор $[K'(x_0)]_r^{-1}$ с нормой

$$\|[K'(x_0)]_r^{-1}\| = B_0; \tag{6.32}$$

3) в сфере $S\{x : \|x - x_0\| \leq \frac{B_0\eta_0}{1-q}\} \quad (q < 1)$ выполняется условие

$$\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq q/(B_0(1 + q)).$$

В этом случае уравнение (6.27) имеет в S решение x^*, к которому сходятся приближения (6.28), и справедлива оценка $\|x^* - x_n\| \leq$ $\leq q^n\eta_0 B_0/(1 - q)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что во всей области S существует равномерно ограниченный правый обратный оператор $[K'(x_n)]_r^{-1}$. В самом деле, из леммы Л.С. Раковщика следует, что

$$\|[K'(x_n)]_r^{-1}\| \leq (1 + q)B_0. \tag{6.33}$$

Покажем теперь, что все приближения, получаемые по формуле (6.28), где под $[K_n'(x_n)]^{-1}$ понимается правый обратный оператор для $K'(x_n)$, удовлетворяющий равенству (6.32), лежат в S. Действительно, $\|x_1 - x_0\| = \|[K'(x_0)]_r^{-1}K(x_0)\| \leq B_0\eta_0 < B_0\eta_0/(1 - q)$, т. е. $x_1 \in S$.

Пусть уже доказано, что $x_m \in S$ для $m \leq n$. Так как $x_n - x_{n-1} =$ $= [K'(x_0)]_r^{-1}K(x_{n-1})$, то по лемме 6.1

$$\|x_{n-1} - x_n\| \leq \|[K'(x_n)]_r^{-1}[K(x_n) - K(x_{n-1}) - K'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})]\| \leq$$
$$\leq q\|x_n - x_{n-1}\|. \tag{6.34}$$

Отсюда следует, что $\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{k=0}^{n} q^k B_0\eta_0$, т. е. $x_{n+1} \in S$.

Из (6.34) следует, что последовательность $\{x_n\}$– фундаментальная и, следовательно, существует элемент $x^* = \lim x_n$. Так как

$K(x_n) =$
$= -K'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$, то $K(x^*) = 0$. Из (6.34) следует, что

$$\|x^* - x_n\| \le \sum_{k=n}^{\infty} q^k B_0 \eta_0 \le \frac{q^n B_0 \eta_0}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если решение x^* уравнения (6.27) входит в какую-нибудь область $S_n = S \cap \Delta R(x_n)$, где $\Delta R(x_n)$ – область значений оператора $[K'(x_n)]_r^{-1}$ $\quad (x_n \in S)$, удовлетворяющего неравенствам (6.32), (6.33), то оно единственно в этой области. В самом деле, пусть x^* и $\overline{x} \in S_n$ являются решениями уравнения (6.27). Тогда

$$\|x^* - \overline{x}\| = \|[K'(x_n)]_r^{-1}[K(x^*) - K(\overline{x}) - K'(x_n)(x^* - \overline{x})]\| \le q\|x^* - \overline{x}\| < \\ < \|x^* - \overline{x}\|. \tag{6.35}$$

Отсюда следует единственность решения в этой области.

Рассмотрим решение уравнения (6.27) модифицированным методом Ньютона – Канторовича.

Теорема 6.8 [12]. Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть выполнены условия:

1) $\|K(x_0)\| \equiv \eta_0$;

2) оператор K имеет производную Гато в окрестности точки x_0, и существует правый обратный оператор $R(x_0) = [K'(x_0)]_r^{-1}$ с нормой $\|R(x_0)\| = B_0$;

3) в сфере $S\{x : \|x - x_0\| \le \frac{B_0\eta_0}{1-q}\}$ $\quad (q < 1)$ выполняется условие $\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \le q/B_0$.

В этом случае уравнение (6.27) имеет в S решение x^*, к которому сходятся приближения (6.29), и справедлива оценка $\|x^* - x_n\| \le$ $\le q^n \eta_0 B_0/(1-q)$. Решение x^* единственно в пересечении $S \cap (x_0 + \Delta R(x_0))$.

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 6.7.

7. Элементы теории краевых задач и сингулярных интегральных уравнений

В параграфе приводятся сведения из теории краевых задач и сингулярных интегральных уравнений, используемые в третьей и четвертой главах. При изложении этого материала мы следуем книге [66].

7.1. Интегралы типа Коши

Пусть L – некоторый гладкий замкнутый контур плоскости комплексной переменной z. Под гладким контуром понимается простая (без точек самопересечения) замкнутая или незамкнутая линия с непрерывно меняющейся касательной, не имеющая точек возврата. Область, заключенную внутри контура L, будем называть внутренней и обозначать через D^+, а область, лежащую вне контура L, будем называть внешней и обозначать через D^-.

Пусть $f(z)$ – функция аналитическая в области D^+ и непрерывная в области $D^+ \cup L$. В теории функции комплексной переменной известна формула Коши [66]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & \text{если} \quad z \in D^+, \\ 0, & \text{если} \quad z \in D^-. \end{cases} \tag{7.1}$$

Если функция $f(z)$ аналитическая в области D^- и непрерывная в области $D^- \cup L$, то справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & \text{если} \quad z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), & \text{если} \quad z \in D^-. \end{cases} \tag{7.2}$$

Положительное направление обхода контура L берется, как принято в теории функций комплексной переменной, таким образом, чтобы область D^+ оставалась слева.

Рассмотрим интеграл

$$J\varphi = \int\limits_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad a < t < b. \tag{7.3}$$

Известно, что этот интеграл не берется ни в смысле Римана, ни в смысле Лебега. Для того, чтобы придать интегралу (7.3) смысл, Коши ввел новый тип интегралов (так называемые интегралы в смысле главного значения по Коши). Исторически интегралы в смысле главного значения по Коши являются одним из первых методов регуляризации расходящихся интегралов. Подробнее об этом см. [69].

Определение 7.1 [66]. Главным значением по Коши особого интеграла $\int\limits_a^b f(\tau)(\tau - c)^{-1}d\tau, \quad a < c < b$, называется предел

$$\lim_{\eta \to 0}\left[\int\limits_a^{c-\eta} \frac{f(\tau)}{\tau - c}d\tau + \int\limits_{c+\eta}^b \frac{f(\tau)}{\tau - c}d\tau\right].$$

Покажем, что если $f(t) \in H_\alpha(A)\,(0 < \alpha \le 1)$, то существует интеграл $\int\limits_a^b f(\tau)(\tau - c)^{-1}d\tau, \quad a < c < b$.

В самом деле, из определения интеграла в смысле главного значения по Коши следуют его однородность и аддитивность. Поэтому

$$\int_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau = \int_a^b \frac{f(\tau) - f(c)}{\tau - c} d\tau + f(c) \int_a^b \frac{d\tau}{\tau - c}. \tag{7.4}$$

Первый из интегралов в правой части предыдущего равенства есть несобственный интеграл Римана. Это следует из неравенства $|f(\tau) - f(c)|/|\tau - c| \leq A|\tau - c|^{\alpha}/|\tau - c| \leq A/|\tau - c|^{1-\alpha}$ и критерия Коши существования несобственных интегралов [158]. Второй интеграл из правой части равенства (7.4) по определению равен

$$\int_a^b \frac{d\tau}{\tau - c} = \ln\left|\frac{b - c}{a - c}\right|.$$

Равенство (7.4) широко используется в теории сингулярных интегральных уравнений.

Определим теперь главное значение по Коши особого интеграла на криволинейном контуре. Рассмотрим интеграл

$$Jf = \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L,$$

где L – гладкая кривая в плоскости комплексной переменной z.

Проведем из точки t контура, как из центра, окружность радиуса r, и пусть t_1, t_2 – точки пересечения этой окружности с кривой L. Радиус r будем считать настолько малым, чтобы окружность не имела с контуром L других точек пересечения кроме t_1 и t_2. Обозначим часть контура L, вырезанного окружностью, через l и возьмем интеграл по оставшейся дуге $\int\limits_{L \setminus l} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

Определение 7.2 [66]. Предел интеграла $\int\limits_{L \setminus l} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$ при $r \to 0$ называется главным значением по Коши особого интеграла $\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

В теории краевых задач и сингулярных интегральных уравнений широко применяются формулы Сохоцкого – Племеля.

Пусть L– замкнутый контур. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условие Гельдера.

Будем обозначать предельное значение функции $\Phi(z)$ при стремлении точки z изнутри контура L к точке t на контуре L через $\Phi^+(t)$, а предельное значение функции $\Phi(z)$ при стремлении точки z извне контура к точке t на контуре L через $\Phi^-(t)$.

Справедливы следующие формулы, называемые формулами Сохоцкого – Племеля:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ t \in L,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\ t \in L. \tag{7.5}$$

Формулы (7.5) часто используются и в такой форме

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),\ \ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{7.6}$$

При исследовании приближенных методов решения полисингулярных интегральных уравнений понадобятся формулы Сохоцкого для кратных интегралов типа Коши.

Приведем эти формулы, следуя монографии [66].

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)},$$

где $\varphi \in H_{\alpha\alpha}(0 < \alpha \leq 1)$, $L = \gamma_1 \times \gamma_2$, γ_i– простой гладкий замкнутый контур в плоскости комплексной переменной z_i $(i = 1, 2)$.

Контур γ_i делит плоскость комплексной переменной z_i на две части: внутреннюю $-D_i^+$ и внешнюю $-D_i^-$, $i = 1, 2$. Топологические произведения $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$ называются регулярными бицилиндрическими областями.

Обозначим через $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ предельные значения интеграла $\Phi(z_1, z_2)$, когда точка $(t_1, t_2) \in D^{\pm\pm}$ стремится к точке $(t_1, t_2) \in L$.

Введем обозначения

$$S_1\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{\varphi(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1}d\tau_1,$$

$$S_2\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\varphi(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2}d\tau_2,$$

$$S_{12}\varphi = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}.$$

Формулы Сохоцкого записываются в двух эквивалентных видах

$$\Phi^{++} = \frac{1}{4}(\varphi + S_1\varphi + S_2\varphi + S_{12}\varphi),\ \Phi^{--} = \frac{1}{4}(\varphi - S_1\varphi - S_2\varphi + S_{12}\varphi),$$

$$\Phi^{+-} = \frac{1}{4}(-\varphi - S_1\varphi + S_2\varphi + S_{12}\varphi),\ \Phi^{-+} = \frac{1}{4}(-\varphi + S_1\varphi - S_2\varphi + S_{12}\varphi),$$

или

$$\Phi^{++} \pm \Phi^{+-} \pm \Phi^{-+} + \Phi^{--} = \begin{cases} S_{12}\varphi \\ \varphi, \end{cases}$$

$$\Phi^{++} \mp \Phi^{+-} \pm \Phi^{-+} - \Phi^{--} = \begin{cases} S_1\varphi \\ S_2\varphi. \end{cases}$$

При обосновании аналитических и численных методов решения краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений необходимо знать гладкость функции

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}, \quad t \in L,$$

при различных предположениях о гладкости функции $\varphi(t)$.

В случае, если $\varphi(t) \in H_\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1)$, вопрос о гладкости функции $\Phi(t)$ решается теоремой Привалова.

Теорема Привалова [66]. Если L – гладкий замкнутый контур и $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha \leq 1)$, то сингулярный интеграл $\Phi(t)$ также удовлетворяет этому условию с показателем α, если $0 < \alpha < 1$, и показателем $1 - \varepsilon$, если $\alpha = 1$. Здесь ε - как угодно малое положительное число.

7.2. Краевая задача Римана

Прежде чем переходить к изучению теории краевой задачи Римана, напомним несколько утверждений теории функций комплексной переменной, которыми будем часто пользоваться на протяжении этого пункта.

Пусть L – гладкий замкнутый контур, а $G(t)$ – заданная на нем непрерывная функция, не обращающаяся в нуль.

Определение 7.3. Индексом функции $G(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении.

Индекс функции $G(t)$ записывается в виде

$$\chi = \mathrm{Ind}G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L,$$

где через $[\arg G(t)]_L$ обозначено приращение функции $G(t)$ при обходе контура L в положительном направлении.

Нетрудно видеть, что

$$\chi = \frac{1}{2\pi}[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L d[\arg G(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d\ln G(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G'(t)}{G(t)}dt. \tag{7.7}$$

Последний интеграл является логарифмическим вычетом функции $G(t)$. Из формулы (7.7) и теоремы о логарифмическом вычете вытекают основные свойства индекса [66]:

1. Индекс функции, непрерывной на контуре L и нигде не обращающейся в нуль на контуре L , есть целое число или нуль.

2. Индекс произведения функций равен сумме индексов сомножителя. Индекс частного двух функций равен разности индексов делимого и делителя.

3. Если $G(t)$ есть краевое значение функции, аналитической внутри или вне контура, то индекс ее равен числу нулей внутри контура или, соответственно, числу нулей вне контура, взятому со знаком минус.

4. Если функция $G(t)$ аналитическая внутри контура, за исключением конечного числа точек, где она может иметь полюсы, то число нулей нужно заменить на разность числа нулей и числа полюсов.

Нули и полюсы считаются с учетом их кратности.

Теорема об аналитическом продолжении [66]. Пусть две области D_1 и D_2 граничат вдоль некоторой гладкой кривой L; в областях D_1 и D_2 заданы аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Предположим, что при стремлении точки z к кривой L обе функции стремятся к предельным значениям, непрерывным на кривой L, причем эти предельные значения равны между собой. При этих условиях функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ будут аналитическим продолжением друг друга.

Теорема Лиувилля (обобщенная) [66]. Пусть $f(z)$ аналитична во всей плоскости комплексной переменной, за исключением точек $a_0 = \infty$, $a_k (k = 1, 2, \ldots, n)$, где она имеет полюсы, причем главные части разложений функции $f(z)$ в окрестности полюсов

имеют вид:
в точке a_0 ;$G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z + \ldots + c_{m_0}^0 z^{m_0}$,; в точках a_k

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z-a_k} + \frac{c_2^k}{(z-a_k)^2} + \ldots + \frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}}.$$

Тогда функция $f(z)$ есть рациональная функция и может быть представлена формулой

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

где C – константа.

Постановка задачи Римана . Даны простой гладкий контур L, делящий плоскость комплексной переменной z на две части: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-, и две функции точек контура $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G(t)$ не обращается в нуль на L. Требуется найти две функции: $\Phi^+(z)$– аналитическую в области D^+ и $\Phi^-(z)$– аналитическую в области D^-, включая бесконечно удаленную точку $z = \infty$, удовлетворяющие на контуре L уравнениям

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{(однородная задача)}, \tag{7.8}$$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(неоднородная задача)}. \tag{7.9}$$

Две функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ можно определить как одну кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z) = (\Phi^+(z), \Phi^-(z))$.

Функция $G(t)$ называется коэффициентом задачи Римана, а функция $g(t)$– ее свободным членом.

Решение задачи Римана основано на решении задачи об определении кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ по заданному скачку. Требуется найти кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$, исчезающую на бесконечности и испытывающую при переходе через контур L скачок $\varphi(t)$ ($\varphi(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$), т.е. удовлетворяющую уравнению

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t). \tag{7.10}$$

Из формул Сохоцкого – Племеля (7.5) или (7.6) следует, что решением задачи о скачке (7.10) является функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Если отбросить условие $\Phi^-(\infty) = 0$, то решением задачи о скачке является функция

$$\Phi(z) = C + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau,$$

где $C = \text{const}$.

Определение 7.4 [66]. Индекс χ коэффициента $G(t)$ задачи Римана называется индексом задачи.

Пусть однородная краевая задача Римана (7.8) разрешима, и пусть функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – ее решение. Обозначим число нулей функции $\Phi^+(z)$ в области D^+ через N^+, а число нулей функции $\Phi^-(z)$ в области D^- – через N^-. Вычислив индекс от обеих частей равенства (7.8) и воспользовавшись тем, что индекс произведения равен сумме индексов сомножителей, имеем:

$$N^+ + N^- = \text{Ind}G = \chi. \tag{7.11}$$

Из равенства (7.11) можно сделать следующие выводы:

1) для разрешимости однородной задачи Римана необходимо, чтобы индекс задачи был неотрицательным (функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ по условию полюсов не имеют);

2) если $\chi > 0$, то функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, являющиеся решением задачи, имеют в совокупности χ нулей;

3) если $\chi = 0$, то функции $\Phi^\pm(z)$ не имеют нулей.

Эти свойства будут неоднократно использованы ниже.

Исследуем решение однородной задачи Римана отдельно для случаев, когда индекс равен нулю, больше нуля и меньше нуля.

Пусть индекс равен 0. В этом случае $\ln G(t)$ является однозначной функцией, а функции $\ln \Phi^+(z)$ и $\ln \Phi^-(z)$ – аналитическими, соответственно, в областях D^+ и D^-. Логарифмируя краевое условие (7.8), имеем:

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t). \tag{7.12}$$

Уравнение (7.12) является задачей о скачке. Решая ее, имеем:

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}d\tau.$$

Поэтому

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\ \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)},\ \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{7.13}$$

Функции (7.13) дают решение однородной задачи Римана в предположении, что $\Phi^-(\infty) = 1$. Если отказаться от этого предположения, то однородная задача имеет бесконечное множество решений, зависящих от произвольного параметра A:

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)},\ \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}. \tag{7.14}$$

Следовательно, в этом случае имеется только одно линейно независимое решение. Если ищется решение, равное нулю на бесконечности ($\Phi^-(\infty) = 0$), то однородная задача Римана имеет только тривиальное (нулевое) решение. Это замечание понадобится ниже при исследовании разрешимости сингулярных интегральных уравнений.

Кроме того, отметим важное следствие, которое широко применяется при обосновании проекционных методов решения сингулярных интегральных уравнений.

Следствие 7.1 [66]. Заданную на контуре L произвольную функцию $G(t)$, удовлетворяющую условию Гельдера, не равную нулю ни в одной точке контура L и имеющую индекс, равный нулю, можно представить в виде отношения функций $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, являющихся краевыми значениями функций, аналитических в областях D^+, D^- и не имеющих в этих областях нулей. Эти функции определяются с точностью до константы формулой (7.14).

Исследуем теперь случай, когда $\chi > 0$. Для определенности будем считать, что начало координат расположено в области D^+.

Запишем краевое условие в виде

$$\Phi^+(t) = t^\chi (G(t)t^{-\chi})\Phi^-(t). \tag{7.15}$$

Очевидно, функция $G_1(t) = G(t)t^{-\chi}$ имеет индекс, равный нулю. Представим функцию $G_1(t)$ в виде $G_1(t) = \Psi^+(t)/\Psi^-(t)$, где

$$\Psi^\pm(t) = \exp(\Gamma^\pm(t)),\ \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{ln(G_1(\tau)\tau^{-\chi})}{\tau - z}d\tau. \tag{7.16}$$

Краевое условие (7.15) эквивалентно следующему:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Psi^+(t)} = t^\chi \frac{\Phi^-(t)}{\Psi^-(t)}. \tag{7.17}$$

Анализируя соотношение (7.17), нетрудно заметить, что его левая часть является аналитической функцией в области D^+, а правая часть – аналитической в области D^- всюду, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс порядка не выше χ. Поэтому по теореме об аналитическом продолжении левая и правая части равенства (7.16) являются ветвями одной и той же аналитической функции, единственной особенностью которой является полюс в бесконечно удаленной точке. Следовательно, по обобщенной теореме Лиувилля

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Psi^+(t)} = t^\chi \frac{\Phi^-(t)}{\Psi^-(t)} = P_\chi(t), \tag{7.18}$$

где $P_\chi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\chi} \alpha_k t^k$ – полином степени χ с произвольными коэффициентами.

Из выражения (7.18) имеем

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_\chi(z),\ \Phi^-(z) = \frac{e^{\Gamma^-(z)}}{z^\chi} P_\chi(z). \tag{7.19}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 7.1 [66]. Если индекс χ однородной краевой задачи Римана положителен, то задача имеет $\chi+1$ линейно независимых решений $\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)}$, $\Phi_k^-(z) = z^{k-\chi} e^{\Gamma^-(z)}$, $k = 0, 1, \ldots, \chi$. Общее решение содержит $\chi+1$ произвольных постоянных и определяется формулой (7.19).

Из этой теоремы следует, что если индекс $\chi = 0$, то однородная задача имеет одно линейно независимое решение.

Если индекс $\chi < 0$, то однородная задача не имеет решений, отличных от тривиального.

Перейдем к исследованию неоднородной краевой задачи Римана.

Для удобства исследования введем каноническую функцию однородной задачи.

Определение 7.5 [66]. Порядком аналитической функции $\Phi(z)$ в некоторой точке z_0 называется показатель низшей степени в разложении $\Phi(z)$ в ряд по степеням $(z - z_0)$. Отметим, что в окрестности бесконечно удаленной точки разложение проводится по степеням $1/z$.

Определение 7.6 [66]. Канонической функцией однородной задачи Римана называется кусочно-аналитическая функция, удовлетворяющая краевому условию (7.8) и имеющая нулевой порядок всюду в конечной части плоскости комплексной переменной. В бесконечно удаленной точке ее порядок будет равен χ.

Записывая краевое условие задачи Римана в виде

$$\Phi^+(t) = t^\chi [t^{-\chi} G(t)] \Phi^-(t)$$

и повторяя проведенные выше при решении однородной задачи рассуждения, получаем каноническую функцию:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},\ X^-(z) = z^{-\chi} e^{\Gamma^-(z)},$$

где $\Gamma(z)$ определено формулой (7.16).

После этих предварительных замечаний переходим к исследованию неоднородной задачи Римана. Представив коэффициент задачи $G(t)$ в виде $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$, приведем уравнение (7.9) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Воспользовавшись теоремой Привалова, можно показать, что функции $X^{\pm}(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, и так как $X^+(t) \neq 0$ на контуре L, то функция $g(t)/X^+(t)$ также удовлетворяет условию Гельдера. Поэтому эту функцию можно представить в виде

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t), \text{ где } \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Тогда краевое условие можно записать в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t). \tag{7.20}$$

Исследуем полученное равенство при различных значениях χ. Пусть $\chi \geq 0$. Левая часть равенства (7.20) является функцией аналитической в области D^+, а правая часть является функцией аналитической в области D^- всюду, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс порядка χ. Следовательно, по
обобщенной теореме Лиувилля

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t) = P_\chi(t).$$

Отсюда следует решение

$$\Phi(z) = X(z)[\psi(z) + P_\chi(z)], \tag{7.21}$$

где $P_\chi(z)$ – полином степени χ с произвольными коэффициентами.

Очевидно, формула (7.21) дает общее решение неоднородной задачи Римана, так как в ней содержится решение $X(z)P_\chi(z)$ однородной задачи.

Рассмотрим теперь случай, когда $\chi < 0$. В этом случае функция $\Phi^-(z)/X^-(z)$ равна нулю на бесконечности и, следовательно, равенство (7.20) имеет вид

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \psi^-(z) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z). \tag{7.22}$$

В выражении $\Phi^-(z) = X^-(z)\psi^-(z)$ множитель $X^-(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка $-\chi$, а множитель $\psi^-(z)$ (как интеграл типа Коши) имеет на бесконечности нуль первого порядка. Следовательно, функция $\Phi^-(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка не выше чем $-\chi-1$. Таким образом, если $\chi=-1$, то неоднородная задача разрешима и ее решение единственно, а если $\chi<-1$, то неоднородная задача в общем случае неразрешима. Для ее разрешимости необходимо, чтобы функция $\psi^-(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имела нуль $-\chi-1$ порядка. Для этого необходимо, чтобы первые $-\chi-1$ коэффициента разложения функции $\psi^-(z)$ в ряд Тейлора в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau,$$

были бы равны нулю: $c_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, -\chi-1$.

Тогда решение неоднородной задачи выражается формулой (7.22).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.2 [66]. В случае $\chi > 0$ неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене и ее общее решение дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_\chi(z),$$

где $X(z)$ – каноническая функция, а $P_\chi(z)$ – полином степени χ с произвольными комплексными коэффициентами. Если $\chi=-1$, то неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение. В случае $\chi<-1$ неоднородная задача в общем случае неразрешима. Для того, чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял $-\chi-1$ условиям $c_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, \chi - 1$. При выполнении последних единственное решение задачи дается предыдущей формулой, где нужно положить $P_\chi(z) \equiv 0$.

7.3. Сингулярные интегральные уравнения

Приведенные выше методы решения краевой задачи Римана оказываются полезными при исследовании сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) на замкнутом контуре L

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t). \tag{7.23}$$

При исследовании с.и.у. вида (7.23), как правило, выделяют характеристический оператор

$$K^0 x \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau,\ b(t) = h(t,t)$$

и вполне непрерывный оператор

$$Hx = \int\limits_L \frac{h(t,\tau) - h(t,t)}{\tau - t} x(\tau) d\tau.$$

Вначале исследуем разрешимость характеристического уравнения

$$K^0 x \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t). \tag{7.24}$$

Одним из методов решения характеристических уравнений является его сведение к краевой задаче Римана.

Введем кусочно-аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит искомое решение характеристического уравнения

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{x(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Используя формулы Сохоцкого – Племеля, имеем:

$$x(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{x(\tau)}{\tau - t} = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{7.25}$$

Подставляя в уравнение (7.24) вместо $x(t)$ и $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{x(\tau)}{\tau - t}$ их значения по формуле (7.25), приходим к краевой задаче:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{7.26}$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)},\ g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Так как решение уравнения (7.24) ищем в виде интеграла типа Коши $\Phi(z)$, который на бесконечности равен нулю, то решение краевой задачи (7.26) ищем при дополнительном условии

$$\Phi^{-}(\infty) = 0. \tag{7.27}$$

Индекс коэффициента $G(t)$ краевой задачи Римана (7.26) называется индексом сингулярного интегрального уравнения (7.24).

Нормальным (не исключительным) случаем уравнения (7.24) называется случай [125], когда коэффициент $G(t)$ соответствующей краевой задачи Римана не обращается на контуре L в нуль или бесконечность. Исключительным случаем сингулярного интегрального уравнения называется случай [125], когда соответствующий коэффициент $G(t)$ обращается в нуль или бесконечность на контуре L. Нетрудно видеть, что в нормальном случае $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ на L.

Повторяя рассуждения, проведенные при решении краевой задачи Римана, и учитывая условия (7.27), приходим к следующему утверждению.

Теорема 7.3 [66]. Если $\chi > 0$, то однородное уравнение $K^0\varphi = 0$ имеет χ линейно независимых решений. Если $\chi \leq 0$, то однородное уравнение имеет только тривиальное (нулевое) решение. Если $\chi \geq 0$, то неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части $g(t)$ и его общее решение зависит от χ произвольных постоянных. Если $\chi < 0$, то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть f удовлетворяет $-\chi$ условиям

$$\int\limits_L \psi_k(t) f(t) dt = 0,$$

где $\psi_k(t) = z(t)^{-1} t^{k-1}$, $z(t) = [a(t) + b(t)]X^{+}(t) = [a(t) - b(t)]X^{-}(t)$.

Рассмотрим теперь общее сингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int\limits_L h(t,\tau) x(\tau) d\tau = f(t). \tag{7.28}$$

В настоящее время неизвестны методы решения полных сингулярных интегральных уравнений вида (7.28) в замкнутой форме. Их исследование проводится с помощью методов регуляризации, подробное изложение которых дано в [66], [125].

Результатом этого исследования являются теоремы Нетера.

Теорема I. Число решений сингулярного интегрального уравнения (7.28) конечно.

Теорема II. Необходимым и достаточным условием разрешимости сингулярного интегрального уравнения (7.28) является выполнение равенства $\int\limits_L f(t)\psi_j(t)dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n'$, где $\psi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n'$, – полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K'\psi = 0$, где

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int\limits_L h(\tau, t)\psi(\tau)d\tau.$$

Теорема III. Разность числа n линейно независимых решений особого уравнения $Kx = 0$ и числа n' линейно независимых решений союзного уравнения $K'\psi = 0$ зависит лишь от характеристической части оператора K и равна ее индексу, т.е. $n - n' = \chi$.

8. Краткий обзор методов решения интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма

8.1. Аналитические методы решения интегральных уравнений Вольтерра

Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода определяются, соответственно, как функциональные уравнения вида

$$Hx \equiv \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} h(t,s)x(s)ds = f(t) \tag{8.1}$$

и

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} h(t,s)x(s)ds = f(t), \tag{8.2}$$

где $f(t)$ – данная функция, ядро $h(t,s)$ определено в области $D := \{(t,s) : \quad 0 \le s \le t \le b\}$, $x(t)$ – неизвестная функция, $0 \le \alpha < 1$.

Отметим, что при любых $\alpha (0 \le \alpha < 1)$ оператор Hx – линейный оператор, действующий из $C[0,b]$ в $C[0,b]$.

Первые работы по интегральным уравнениям видов (8.1) и (8.2) датируются началом XIX в. В статьях [162] и [163], опубликованных в 1823 и 1826 гг., Н. Х. Абель показал, что решение задачи о таутохроне сводится к интегральному уравнению (8.1), у которого $h(t,s) \equiv 1$, $\alpha = 1/2$. Задача о таутохроне формулируется следующим образом. Материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости $x0y$ по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав свое движение без начальной скорости в точке кривой с ординатой y, достигла оси x за время $t = f(y)$, где функция $f(y)$ задана заранее. Н. Х. Абель получил решение уравнения (8.1) при $h(t, \tau) \equiv 1$ и произвольном α $(0 < \alpha < 1)$ в замкнутой форме

$$x(t) = c_2 \frac{d}{dt} \{ \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \}, 0 < t < b. \tag{8.3}$$

Здесь $c_\alpha = (sin(\alpha\pi))/\pi$. В случае если $f \in C^1[0, b]$ и $f(0) = 0$, то имеется пара взаимообратимых формул

$$\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} x(s) ds = f(t),\ x(t) = c_\alpha \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f'(s) ds. \tag{8.4}$$

Позднее Ж. Лиувилль, которому, по-видимому, были неизвестны работы Н. Х. Абеля, вновь получил решение уравнения (8.1) при $h(t, s) \equiv 1$ и $0 \leq \alpha < 1$.

Более общее уравнение первого рода, у которого функция $(t - s)^{-\alpha}$ заменена ядром $a(t - s)$, где

$$a(t) = t^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j t^j}{\Gamma(1 + j - \alpha)},$$

$c_0 = 1$, Γ — гамма - функция, было решено в замкнутой форме Н. Я. Сониным [195].

Формулы (8.3) и (8.4), полученные Н. Х. Абелем и Ж. Лиувиллем, возобновили интерес к исследованию дробного дифференцирования и интегрирования, история которых восходит к Лейбницу и Эйлеру. Методы дробного дифференцирования и интегрирования подробно изложены в книге [140], в которой имеется обширная библиография, охватывающая весь период развития этого направления.

История собственно уравнений Вольтерра обычно исчисляется с 1896 г, когда В. Вольтерра была опубликована общая теория уравнений (8.1) [197]. В. Вольтерра для исследования разрешимости уравнения (8.1) при $\alpha = 0$ привел его к уравнениям второго рода вида (8.2). Для этого уравнение (8.1) дифференцированием по переменной t сводилось к уравнению

$$h(t, t) x(t) + \int\limits_0^t h'_t(t, \tau) x(\tau) d\tau = f'(t) \tag{8.5}$$

и в предположении, что $h(t, t) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$, делением обеих частей уравнения (8.5) на $h(t, t)$ сводилось к уравнению (8.2).

В. Вольтерра получил решение уравнения (8.2) в виде формулы

$$x(t) = f(t) + \int\limits_0^t R(t,s)f(s)ds,$$

где $R(t,s)$ – резольвента уравнения (8.2), определяемая формулой

$$R(t,s) = \sum_{l=1}^{\infty} h_l(t,s),$$

а ядра $h_l(t,s)$ вычисляются по рекуррентной формуле

$$h_l(t,s) = \int\limits_s^t h(t,v)h_{l-1}(v,s)dv,$$

$l = 1, 2, 3, \ldots,\ h_1(t,s) = h(t,s)$.

В. Вольтерра доказал равномерную абсолютную сходимость этих рядов в области $D = [0,b]^2$ для любого непрерывного ядра $h(t,\tau)$.

Результаты В. Вольтерра были совершенно новыми для своего времени, однако, как отмечает G. Brunner [167], [168], методы их получения не были совершенно новыми. В своей диссертации [184], опубликованной в 1894 г., Le Roux изучал методы решения уравнения (8.1) (при $f(0) = 0$), используя подобный аппарат, но не доказывая равномерной сходимости рядов.

Термин "интегральные уравнения второго рода с переменным верхним пределом" (сейчас эти уравнения называются уравнениями Вольтерра второго рода) был введен в 1908 г. Т. Лалеско [182], причем классификация интегральных уравнений, как интегральных уравнений первого, второго и третьего рода, была впервые введена Д. Гильбертом, хотя термин "интегральные уравнения" был использован еще Дю буа-Раймондом [172] в 1888 г.

Ряды, составленные из итерированных ядер, использовали при решении различных задач Caque и Beer, однако они не исследовали сходимости рядов, составленных из итерированных ядер.

Абсолютная равномерная сходимость рядов, составленных из итерированных ядер, была исследована Нейманом [186] в 1877 г. С тех пор сходящиеся ряды, члены которых получены методом последовательных приближений, называются рядами Неймана. С подобными рядами нам приходится неоднократно сталкиваться при исследовании итерационных методов.

В том же 1896 г. В. Вольтерра распространил свои результаты на слабосингулярные интегральные уравнения первого рода вида

(8.1), которые он преобразовывал в интегральные уравнения вида (8.2) с гладкими ядрами.

Случай, когда в уравнении (8.5) $h(t,t)$ обращается в нуль на сегменте $[0,b]$, но не равна тождественно нулю, приводит к уравнениям третьего рода. Теорию этих уравнений развивали В. Вольтерра [197], Т. Лалеско [182], [183] и Г. Т. Девис [171].

Теория интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода изложена в книге Трикоми [157]. Основные результаты, полученные в теории интегральных уравнений Вольтерра первого, второго и третьего рода приведены в обзоре З. Б. Цалюка [160].

8.2. Приближенные методы решения уравнений Вольтерра

Первой работой по приближенным методам решения уравнений Вольтерра была статья В. Вольтерра [197], в которой для решения уравнения второго рода

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)(t-\tau)^{-\gamma}x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le b, \tag{8.6}$$

при $\gamma = 0$ использовалась следующая вычислительная схема. Разобьем сегмент $[0,b]$ на N частей точками t_k, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ с длиной $h_k = |t_{k+1} - t_k|$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Приближенное решение уравнения (8.6) В. Вольтерра искал в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t)$, равной на каждом интервале $[t_k, t_{k+1})$, $h_k = t_{k+1} - t_k$, подлежащему определению числу x_k, $k =$
$= 0, 1, \ldots, N-1$. Значения x_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, определяются из системы алгебраических уравнений

$$x_N(t_k) + \sum_{l=0}^{k-1} h_l h(t_k, t_l) x_N(t_l) = f(t_k), \ k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{8.7}$$

Система (8.7) имеет нижнюю треугольную матрицу, причем все элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице. Следовательно, матрица системы (8.7) обратима, а сама система (8.7) однозначно разрешима.

Систему (8.7) можно записать в операторной форме

$$K_N x_N \equiv x_N + H_N x_N = f_N, \ f_N = (f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_{N-1})). \tag{8.8}$$

Система уравнений (8.7) (и, следовательно, (8.8)) является частным случаем системы

$$x(t_n) = h \sum_{l=0}^{n} p_{nl} h(t_n, t_l) x(t_l) + f(t_n), n = k, k+1, \ldots, N,\ k \geq 1, \quad (8.9)$$

где $t_l = lh$, $l = 0, 1, \ldots, N$, $p_{kl}-$ коэффициенты квадратурной формулы.

Вычислительная схема (8.9) предназначена для решения интегральных уравнений вида (8.6) при $0 \leq \gamma < 1$.

Для приближенного решения уравнений Вольтерра по вычислительной схеме (8.9) необходимо располагать значениями $x(t_l)$ в точках $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}$. Для нахождения начальных значений используются методы, предложенные Адамсом, Рунге, Куттом для обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближенные методы решения интегральных уравнений Вольтерра по вычислительным схемам вида (8.9) изложены в статье [199]. Важную роль при построении вычислительных методов решения уравнений Вольтерра играют способы дискретизации интегралов с переменным верхним пределом. Эти вопросы подробно исследованы в монографии В.И. Крылова [104].

Как отмечает Г. Бруннер [167], применение вычислительных схем вида (8.9) при кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции и при аппроксимации интегралов с переменным верхним пределом по различным квадратурным формулам сопряжено с рядом трудностей: 1) использование этих формул с неравномерным шагом практически невозможно; 2) необходимо использовать дополнительные методы для нахождения начальных значений $x(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$; 3) большинство из методов дискретизации не применимо в случае слабосингулярных интегральных уравнений.

Первое обобщение методов дискретизации Вольтерра принадлежит Хуберу [178], который для решения слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра первого рода использовал аппроксимацию искомой функции кусочно-непрерывной функцией. Позднее для решения уравнений вида (8.6) Вагнер [198] использовал локальные кубические сплайны. Начиная с этой работы, для решения интегральных уравнений Вольтерра начали применять методы сплайн-коллокации.

Обзоры аналитических и численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра содержатся в [60], [85], [142], [160], [164], [167] $-$ [169].

8.3. Элементы теории линейных интегральных уравнений Фредгольма

В теории интегральных уравнений Фредгольма различают два основных класса: линейные интегральные уравнения и нелинейные интегральные уравнения.

Линейные интегральные уравнения имеют вид

$$a(t)x(t) + \int\limits_{\Delta} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in \Delta, \tag{8.10}$$

где a, h, f – заданные функции, $x(t)$ – искомая функция, Δ – ограниченная или неограниченная область евклидова пространства одного или многих измерений, $d\tau$ – мера в этом пространстве. Как правило, под $d\tau$ понимается элемент объема. Функция $h(t,\tau)$ называется ядром, $f(t)$ – свободным членом, $a(t)$ – коэффициентом уравнения.

В зависимости от постановки задачи интеграл в уравнении (8.10) понимается в смысле Римана или Лебега. Функция $x(t)$ является решением уравнения (8.10), если после ее подстановки в уравнение оно превращается в тождество (если интеграл понимается в смысле Римана) или правые и левые части уравнения равны между собой всюду, кроме множества меры нуль (если интеграл понимается в смысле Лебега).

В зависимости от коэффициента $a(t)$ выделяют три разновидности линейных интегральных уравнений. Если $a(t) \equiv 0$, то уравнение (8.10) называется уравнением первого рода; если $a(t) \equiv 1$, то уравнение (8.10) называется уравнением второго рода; если $a(t)$ обращается в нуль на некотором подмножестве Δ_0 (не совпадающем с Δ), то уравнение (8.10) называется уравнением третьего рода.

В предыдущих пунктах отмечалось, что первые работы по теории интегральных уравнений относятся к началу XIX в., однако, как отдельное направление, теория интегральных уравнений Фредгольма стала формироваться только с конца XIX в.. Это связано с интересом к интегральным уравнениям Фредгольма, возникшим после того, как было показано, что задача Дирихле для уравнения Лапласа сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Теория линейных интегральных уравнений была создана И. Фредгольмом, Д. Гильбертом и Э. Шмидтом.

Задолго до создания теории линейных интегральных уравнений Фредгольма в работах Ж. Лиувилля, Л. Фукса, Д. Пеано, К. Неймана, Э. Пикара были разработаны и исследованы итерационные методы решения линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

И. Фредгольм изучал уравнения вида

$$x(t) - \lambda \int_a^b h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{8.11}$$

и соответствующие (8.11) однородные уравнения

$$x(t) - \lambda \int_a^b h(t, \tau) x(\tau) d\tau = 0, \tag{8.12}$$

где λ – числовой параметр. Отметим, что ядра $h(t, \tau)$ могут быть комплексными функциями действительных переменных t и τ, а параметр λ – комплексным числом.

Напомним, что значение λ, при котором уравнение (8.12) имеет ненулевое решение, называется характеристическим (или фундаментальным) значением ядра h (или уравнения (8.12)), а ненулевое решение $x(t)$ уравнения (8.12) – собственной (или фундаментальной) функцией ядра h (или уравнения (8.12)), соответствующей собственному значению λ.

Фредгольмом была установлена связь между разрешимостью уравнений (8.11) и (8.12), а также связь между разрешимостью уравнений (8.11) и (8.12) и разрешимостью сопряженных к ним уравнений.

Ядро $h^*(t, \tau)$, полученное из данного ядра $h(t, \tau)$ перестановкой аргументов и заменой полученной функции на комплексно-сопряженную, называется сопряженным с данным ядром $h(t, \tau)$.

Если ядро вещественное, то $h^*(t, \tau) = h(\tau, t)$.

Уравнение

$$z(t) - \bar{\lambda} \int_a^b h^*(t, \tau) z(\tau) d\tau = g(t), \tag{8.13}$$

в котором $g(t)$ – произвольная квадратично суммируемая функция, называется сопряженным с уравнением (8.11).

Уравнение

$$z(t) - \bar{\lambda} \int_a^b h^*(t, \tau) z(\tau) d\tau = 0 \tag{8.14}$$

является однородным уравнением, соответствующим уравнению (8.13).

И. Фредгольму принадлежат следующие результаты.

Первая теорема Фредгольма. Уравнение (8.12) имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.

Вторая теорема Фредгольма. Если значение λ правильное (не характеристическое), то как уравнение (8.11), так и сопряженное к нему уравнение (8.13) разрешимо при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно. Соответствующие однородные уравнения имеют только тривиальные решения.

Третья теорема Фредгольма. Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение (8.12) так же, как и сопряженное с ним однородное уравнение (8.14), имеют нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения (8.12) конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения (8.14).

Четвертая теорема Фредгольма. Для того, чтобы неоднородное интегральное уравнение (8.11) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член был ортогонален ко всем решениям соответствующего однородного сопряженного уравнения (8.14).

Из теорем Фредгольма вытекает альтернатива Фредгольма, которой часто пользуются при исследовании интегральных уравнений.

Альтернатива Фредгольма. Либо неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

При доказательстве этих теорем Фредгольм аппроксимировал интегральный оператор в уравнении (8.11) интегральными суммами и исследовал интегральное уравнение (8.11) как предельный случай конечной системы алгебраических уравнений.

Позднее Д. Гильберт построил общую теорию линейных интегральных уравнений, опираясь на теорию линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных. Э. Шмидт независимо от Фредгольма построил теорию линейных интегральных уравнений с действительными симметричными ядрами. Теория Шмидта основана на аппроксимации ядра $h(t,\tau)$ вырожденными ядрами.

Теория линейных интегральных уравнений при условии суммируемости с квадратом ядра $h(t,\tau)$ (по обеим переменным) и правой части $f(t)$ была построена Карлеманом.

Теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода изложена во многих учебниках и монографиях, из которых, в первую очередь, отметим книги [74], [85], [98], [122], [133], [137], [145], [157].

Интегральные уравнения первого рода являются классическим примером некорректной по Адамару задачи [154]. Исследование этого класса уравнений основано на методах регуляризации [111], [154] и квазирешений [84].

Интегральные уравнения третьего рода исследовались Г. Бейтманом, Э. Пикаром, Дж. Фубини.

Известно, что уравнение Фредгольма второго рода является частным случаем операторного уравнения

$$Kx \equiv x - Hx = f, \quad K \in [B, B], \tag{8.15}$$

с компактным оператором H, действующим из банахова пространства B в B.

Ф. Рисс и Ю. Шаудер показали, что теоремы Фредгольма распространяются на уравнения вида (8.15). Теория операторных уравнений второго рода вида (8.15) с компактными операторами изложена в [117].

Краткий обзор приближенных методов решения интегральных уравнений Фредгольма приведен во второй главе.

9. Обзор приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений

Теория сингулярных интегральных уравнений (с. и. у.) берет свое начало в классических работах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, относящихся к началу XX столетия. Первые фундаментальные результаты по теории с.и.у. были получены в 20-е гг. прошлого столетия в работах Ф. Нетера и Т. Карлемана. Различные аспекты теории с.и.у. и краевых задач функций комплексных переменных изложены в монографиях И. Н. Векуа [58], Н. П. Векуа [59], Ф. Д. Гахова [66], Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского [67], И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника [72], И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана [73], Р. В. Дудучавы [79], В. А. Какичева [88], В. Д. Купрадзе [105], В. Д. Купрадзе и др. [106], Г. С. Литвинчука [112], С. Г. Михлина [121], С. Г. Михлина и З. Пресдорфа [185], Н. И. Мусхелишвили [125], Л. Г. Михайлова [120], З. Пресдорфа [135], З. Пресдорфа и Б. Зильбермана [190], Б.В. Хведелидзе [159].

Несмотря на бурное развитие теории с.и.у., только небольшое число ее разделов может считаться в основном завершенным.

К таким разделам относится, например, теория одномерных с.и.у. нормального типа. Многие другие разделы переживают интенсивное развитие. К таким разделам относятся приближенные методы решения с.и.у.

Необходимость в развитии приближенных методов решения с.и.у. диктуется двумя обстоятельствами. Во-первых, с.и.у. находят широкое применение в многочисленных областях физики и техники: теории упругости [63], [79], [105], [106], [124], аэродинамике [7], [113], электродинамике [98], теории автоматического управления , квантовой механике [9].

Во-вторых, с.и.у. допускают решение в замкнутой форме только в очень частных случаях.

По-видимому, первой работой по приближенным методам решения с.и.у. была статья М. А. Лаврентьева [108], в которой были исследованы два приближенных метода решения с.и.у. первого рода

$$\int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t). \tag{9.1}$$

Уравнениями вида (9.1) описывается обтекание крыла конечного размаха воздушным потоком.

В работе [108] приближенное решение уравнения (9.1) ищется в виде полигона $x_n(t)$, построенного по равноотстоящим узлам $t_k,\ k =$
$= 1, 2, \ldots, n$. Значения полигонов в узлах $t_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, определяются из условий коллокации в тех же узлах. М. А. Лаврентьев обосновал сходимость метода полигонов в пространстве Гельдера H_β $(0 < \beta \leq 1)$ в предположении, что искомое решение ищется на множестве функций $\|x_n\| \leq A = \mathrm{const}$.

Примерно в это же время появилась работа Н. Винера и Е. Хопфа [200], в которой был предложен принципиально новый метод решения некоторых классов уравнений в свертках. Выделенный ими класс уравнений в свертках называется сейчас уравнениями Винера $-$ Хопфа.

Проекционные методы решения уравнений в свертках исследованы в [67], [73], [135], итерационные $-$ в [32].

В монографии А. Г. Рамма [191] введены и исследованы новые классы интегральных уравнений в свертках.

В.В. Иванов [82, с. 183 $-$ 186] показал, что в общем случае метод полигонов не может быть применим к уравнению (9.1).

К. Е. Аткинсон [161] заметил, что если разнести узлы полигонов и точки коллокации, то приближенное решение сходится к точному в метрике H_β $(0 < \beta \leq 1)$.

Вслед за уравнением (9.1) были исследованы приближенные методы решения уравнений видов

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_{\gamma} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \tag{9.2}$$

и

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{9.3}$$

Здесь $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат, а коэффициенты и правые части уравнений принадлежат классу функций Гельдера.

В. В. Иванов обосновал применимость методов коллокации, наименьших квадратов и Ритца-Галеркина к приближенному решению уравнений вида (9.2) . Результаты этих исследований подытожены в монографии [82]. При обосновании приближенных методов решения с.и.у. вида (9.2) В. В. Иванов использовал метод, заключающийся в том, что уравнение (9.2) и аппроксимирующая его система уравнений сводятся к краевой задаче Римана и аппроксимирующей ее системе уравнений. Для доказательства разрешимости последней использовалась общая теория приближенных методов.

Этот метод Ф. Д. Гахов назвал функциональным.

В рамках функционального метода автором были получены следующие результаты.

Был обоснован [11], [17] – [19] метод механических квадратур для приближенного решения с.и.у.

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \tag{9.4}$$

в пространствах Гельдера и L_2.

В цикле работ И. В. Бойкова [21], [22], И. В. Бойкова и И. И. Жечева [43] – [45], И. И. Жечева [81] были исследованы приближенные методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, систем сингулярных интегральных уравнений и систем сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Были рассмотрены сингулярные интегро-дифференциальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{b_k(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} h_k(t,\tau)x^k(\tau)d\tau\right] = f(t) \tag{9.5}$$

при граничных условиях

$$\int\limits_{\gamma} x(\tau)\tau^{-k-1}d\tau = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{9.6}$$

и при данных Коши.

Были рассмотрены также и более общие сингулярные интегро-дифференциальные уравнения.

Нелинейные сингулярные интегральные уравнения являются предметом исследования многих авторов. Для многих классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений получены критерии существования и единственности решений в различных функциональных классах и исследованы итерационные методы их решения. Изложение основных результатов, полученных в этой области, и подробная библиография приведены в монографии А. И. Гусейнова и Х. Ш. Мухтарова [75].

Первой работой, в которой были предложены и обоснованы методы коллокации и механических квадратур для решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t, x(t)) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau = f(t). \tag{9.7}$$

была статья автора [10].

В цикле статей [10], [13], [14], [17] – [20] автором были предложены и обоснованы различные вычислительные схемы проекционного типа (видоизмененные вычислительные схемы метода механических квадратур) для приближенного решения нелинейных с.и.у. вида (9.7). Обоснование было проведено в пространствах Гельдера и L_2.

Им же [23] – [25] были предложены и обоснованы (при ряде ограничений на коэффициенты уравнений) вычислительные схемы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \frac{b(t_1, t_2)}{\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 +$$

$$+ \frac{c(t_1, t_2)}{\pi i} \int\limits_{\gamma_2} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 + \frac{d(t_1, t_2)}{\pi^2} \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} \frac{x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1} \int\limits_{\gamma_2} h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2), \tag{9.8}$$

где γ_i– единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной $z_i (i = 1, 2)$.

Цикл работ Du Jinyuan посвящен приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений

$$a(t)w(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{w(\tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int\limits_{-1}^{1} h(t, \tau)w(\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

$$a(t)w(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} w(\tau)x(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau + \int\limits_{0}^{2\pi} h(t, \tau)w(\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где $w(t)$– весовая функция.

Из этого цикла отметим здесь статьи [173], [174].

Проекционные методы решения уравнений вида (9.3) с постоянными коэффициентами a, b исследованы А. В. Джишкариани [76], [77].

Различные приближенные методы решения с.и.у. вида (9.3) предложены и исследованы Б. И. Мусаевым [123], Д. Г. Саникидзе [139], K. E. Atkinson [161], D. Elliot [176], E. Jen and R. P. Srivastav [179] и другими.

Второй подход к обоснованию проекционных методов решения уравнений в свертках, частным случаем которых являются с.и.у. вида (9.2), основан на своеобразном операционном исчислении. Это исчисление базируется на теории коммутативных колец [68]. Каждому оператору K ставится в соответствие числовая функция – его символ, в зависимости от свойств которого делается вывод об обратимости, обратимости справа или слева оператора K и сходимости проекционных методов решения уравнения $Kx = f$.

Этот метод в 60-е гг. прошлого столетия был развит в работах И. Ц. Гохберга, И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана применительно к широким классам уравнений в свертках. В монографии И. Ц. Гохберга и И. А. Фельдмана [73] дано изложение этого метода и обсуждены вопросы его применения к различным типам уравнений в свертках, в том числе и к с.и.у. вида (9.2) и системам таких уравнений. Позднее этот метод был применен к с.и.у. и их системах в исключительных случаях. Дальнейшее развитие этого метода и его современное состояние отражено в монографиях З. Пресдорфа [135] и С. Г. Михлина и З. Пресдорфа [185], З. Пресдорфа и Б. Зильбермана [190].

В последние 20 лет начали активно развиваться сплайн-коллокационные методы решения с.и.у. Согласно этим методам приближенное решение ищется в виде сплайна с требующими определения значениями в узлах интерполяции. Эти значения определяются по методу коллокации. Обоснование этого метода основано на исследовании спектра приближенного уравнения. Первой работой, посвященной этому методу, была, по-видимому, статья З. Пресдорфа и Г. Шмидта [189], опубликованная в 1981 г. За протекшие 20 лет сплайн-коллока-
ционный метод получил большое развитие и был применен ко многим видам сингулярных интегральных уравнений [179] – [181], [188].

Вернемся к уравнению (9.1). Это уравнение играет важную роль в аэродинамике, и приближенные методы его решения разрабатывались многими авторами. Выше мы отмечали, что одной из первых работ по приближенному решению с.и.у. была статья М. А. Лаврентьева [108]. Для решения уравнений вида (9.1) и его двумерных аналогов С. М. Белоцерковским в 50=е гг. прошлого столетия был предложен метод дискретных вихрей, нашедший широкое применение при решении различных задач аэродинамики [7]. Строгое обоснование этого метода применительно к уравнению (9.1) получено в работе И. К. Лифанова и Я. Е. Полонского [114]. Метод дискретных вихрей оказался весьма эффективным методом решения многочисленных задач физики и техники. В особенности широко он применяется в аэродинамике и электродинамике. С. М. Белоцерковским, И. К. Лифановым и их учениками методом дискретных вихрей решен широкий круг прикладных задач. Монографии С. М. Белоцерковского и И. К. Лифанова [8] и И. К. Лифанова [113] посвящены применению методов дискретных вихрей и дискретных особенностей к различным видам с.и.у. и решению задач аэродинамики и электродинамики этими методами.

Обзоры численных методов решения сингулярных интегральных уравнений различных видов даны в работах [8], [28], [42], [73], [75], [82], [83], [113], [135], [136], [176], [185], [190].

Выше уже отмечалось, что приближенным методам решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений посвящено большое число работ. При этом наряду с классическими итерационными методами (метод простой итерации, метод Ньютона – Канторовича) используются методы функциональных поправок [107], [116]. В последнее время активно развиваются сверхсходящиеся методы решения задач математической физики. В частности, большое число работ посвящено одному проекционно-итерационному методу, согласно которому полученное проекционным методом приближенное решение используется в качестве начального приближения для последующей итерации исходного уравнения. Для линейных сингулярных интегральных уравнений этот метод исследован в [175], [177].

Необходимо также отметить, что наряду с классическими проекционными методами в последнее время активно развиваются проекционные методы, основанные на применении теории всплесков [170].

ГЛАВА I.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Введение

Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт , $\pi : X \to \bar{X}-$ представление компакта $X \subset B$ конечномерным пространством $\bar{X}$.

Определение 0.1 [149]. Пусть L^n- множество n-мерных линейных подпространств пространства B. Выражение

$$d_n(X,B) = \inf_{L^n} \sup_{x\in X} \inf_{u\in L^n} \|x-u\|,$$

где последний inf берется по всем подпространствам L^n размерности n, определяет $n-$ поперечник Колмогорова.

Определение 0.2 [149]. Пусть $\chi-$ множество всех n-мерных линейных подпространств пространства $B, \mathrm{Map}(X,\chi)-$ совокупность всех непрерывных отображений вида $\pi : X \to \bar{X}$, где $\bar{X} \in \chi$. Выражение

$$d_n'(X,B) = \inf_{(L^n,\pi)} \sup_{x\in X} \|x-\pi(x)\|,$$

где inf берется по всевозможным парам (L^n,π), состоящим из n-мерного линейного пространства $L^n \subset B$ и непрерывного отображения $\pi : X \to L^n$, определяет линейный n-поперечник Колмогорова.

Определение 0.3 [149]. Пусть $\chi \in R^n$. Выражение

$$d_n(X) = \inf_{(\pi:X\to R^n)} \sup_{x\in X} diam \pi^{-1}\pi(x),$$

где inf берется по всем непрерывным отображениям $\pi : X \to R^n$, определяет n-поперечник Бабенко.

Постановка задачи и первые работы, посвященные вычислению поперечников классов функций, принадлежат А. Н. Колмогорову [95], [96]. С. Б. Стечкиным [146] были оценены поперечники класса W_1^r в L_2 и класса W_∞^r в L_∞. В. М. Тихомиров [151] вычислил точные значения поперечников Колмогорова на классе W^r. Поперечники $d_n(W_p^r, L_q)$ при различных значениях p и q исследовались В. М. Тихомировым [151], [152], Ю. И. Маковозом [119], Р. С. Исмагиловым [86], [87],
Е. Д. Глускиным [70]. Окончательные результаты по вычислению поперечников $d_n(W_p^r, L_q)$ получены Б. С. Кашиным [94] и В. Е. Майоровым [118]. Исследованию поперечников на классах функций многих переменных посвящены работы К. И. Бабенко [3] и В. Н. Темлякова [148].

В работе К. И. Бабенко [4] поставлена задача вычисления поперечников на классе функций $Q_r(\Omega, M)$.

Эта задача решена в статье автора [30]. Позднее автором были введены классы функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r\gamma}(\Omega)$, являющиеся обобщением класса функций $Q_r(\Omega, M)$, и для этих классов вычислены поперечники Бабенко и Колмогорова и $\varepsilon -$ энтропия [33], [36], [39].

Восстановление функций тесно связано с задачами табулирования. Приведем основные определения, используя материалы работ [61], [62], [63], [64], [149]. Пусть $B-$ банахово пространство, $X \subset B-$ компакт, $x \subset X-$ элемент компакта X. Рассмотрим алфавит, состоящий из двух букв: нуль и единица. Слова, составленные из этих букв, будем называть двоичными словами. Таблицей элемента $x \subset X$ будем называть двоичное слово T_χ. Его длину N будем называть длиной таблицы. Число различных таблиц не превосходит 2^N. Так как $X-$ компакт, то по теореме Хаусдорфа о необходимых и достаточных условиях компактности множества [117] для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть и, следовательно, с помощью конечного числа двоичных разрядов можно задать элемент x с точностью ε. Будем предполагать, что существует алгоритм, позволяющий по таблице T_χ восстановить элемент с точностью ε. Этот алгоритм, следуя [149], будем называть расшифровывающим алгоритмом таблицы. Расшифровывающий алгоритм будет строиться в явном виде в каждом конкретном случае табулирования.

Под таблицей понимается пара: двоичное слово и расшифровывающий алгоритм, который обозначается через R. Точностью таблицы называется величина $\varepsilon_\chi = \|x - R(T_\chi)\|$.

Множество таблиц (T_χ) данной длины N и расшифровывающий алгоритм R определяют способ табулирования элементов компакта X. Точностью метода табулирования называется величина $\varepsilon = \sup\limits_{x \in X} \varepsilon_\chi$.

Возникает задача построения метода табулирования, имеющего заданную точность при минимальном объеме таблицы. Эта задача тесно связана с колмогоровской теорией ε-энтропии.

Напомним определения и основные результаты ε-энтропии:

1) конечное множество $S \subset B$ называется ε-сетью для X, если для любого $x \in X$ найдется такой элемент $s \in S$, что $\|x - s\| \le \varepsilon$. Минимальную мощность ε-сети обозначим $V_\varepsilon(X, B)$;

2) конечная система ω замкнутых в X множеств называется 2ε покрытием компакта X, если объединение элементов этой системы совпадает с X, а диаметр каждого из них не превосходит 2ε. Минимальную мощность 2ε покрытия обозначим $V_\varepsilon(X)$;

3) конечное множество $U \subset X$ называется ε-различимым, если для любых двух $x_1, x_2 \in U$ имеет место неравенство $\|x_1 - x_2\| > \varepsilon$.

Определение 0.4 [62]. Пусть F есть компактное метрическое пространство, а $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ – его произвольное 2ε покрытие множествами $\{\alpha_k\}$ из F. Обозначим через $N_\varepsilon(F)$ число элементов наиболее экономного, т.е. состоящего из наименьшего числа множеств $\{\alpha_k\}, 2\varepsilon$ покрытия $S_\varepsilon(F)$. Число $H_\varepsilon(F) = \log_2 N_\varepsilon(F)$ называется абсолютной ε-энтропией пространства F.

Связь между длиной таблицы элементов компакта X и его $\varepsilon-$ энтропией описывается следующим утверждением [62].

Теорема 0.1. Для того, чтобы способ табулирования имел точность ε, объем таблиц должен удовлетворять неравенству $N_\varepsilon \geq H_\varepsilon(X)$.

Первый результат по вычислению максимального числа точек в ε-различимом подмножестве множества l переменных, имеющих ограниченные по модулю частные производные, был получен в [61] А. Г. Витушкиным . Исходя из этой работы, А. Н. Колмогоров [96] сформулировал общую программу исследования ε-энтропии и ε-емкости компактов в функциональных пространствах. Им же была вычислена ε-энтропия класса $F^{\rho,n}_{s,L,c}$ функций n переменных, имеющих в кубе $\Omega = [0,\rho]^n$ частные производные порядка p, причем производные p-го порядка ограничены константой C и удовлетворяют условиям Гельдера с коэффициентом L и показателем α

$$A\rho^n \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n/s} \leq H_\varepsilon \left(F^{\rho,n}_{s,L,c}\right) \leq B\rho^n \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n/s},$$

где A и $B-$ положительные параметры, зависящие лишь от s и n, $s = p + \alpha$.

В монографии [62] А.Г. Витушкиным была вычислена ε-энтропия пространств аналитических функций.

В книге [149] исследована ε-энтропия компакта $W^r_p(M,\Omega) \cap \{f \in$ $\in C(\Omega) : \|f\|_\infty \leq N\}$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1, 2, \ldots$, $r = (r_1, \ldots, r_l)$. Показано, что

$$C_0 \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} \leq H\left(\varepsilon, W^r_p(M,\Omega) \bigcap \{f \in C(\Omega) : \|f_\infty\| \leq N\}\right) \leq$$

$$\leq C_1 \left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\rho} + r_1 \cdots r_l \log \frac{N}{\varepsilon} + D,$$

где $\rho = \left(\sum\limits_{i=1}^{l} r_i^{-1}\right); C_0,\ C_1,\ D$ зависят только от r.

В книге [33] исследована ε-энтропия классов функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r\gamma}(\Omega)$. Подробный обзор результатов по ε-энтропии и ε-емкости компактных множеств, содержится в [4], [99], [101], [149], [153].

В обзорной статье [4] введены новые числовые характеристики, связывающие поперечники и ε-энтропию, и поставлен ряд задач о вычислении асимптотики энтропии различных функциональных классов.

1. Поперечники и локальные сплайны на классах функций $\mathbf{Q}_{\mathbf{r},\gamma}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M})$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{r},\gamma}(\boldsymbol{\Omega})$

1.1. Поперечники на классе функций $\mathbf{Q}_{\mathbf{r},\gamma}([-\mathbf{1}, \mathbf{1}], \mathbf{M})$

Теорема 1.1 [30],[33],[36]. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедлива оценка
$$\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp n^{-2r-1}.$$

Доказательство. Оценка снизу $d_n(Q_r(\Omega, M)) \geq An^{-2r-1}$ следует из того, что класс функций $W^{2r+1}(M)$ вложен в класс $Q_r(\Omega, M)$, и из известной оценки [149] $\delta_n(W^{2r+1}(M)) \geq An^{-2r-1}$.

Построим непрерывный сплайн, приближающий функции из класса $Q_r(\Omega, M)$ с точностью An^s и имеющий $N = 4ns+2n-2s-2$ параметров. Для этого разделим сегмент $[-1, 1]$ на $2n$ частей точками $t_k = -1 + (k/n)^v$ и $\tau_k = 1 - (k/n)^v, k = 0, 1, \dots, n$, где $v = (2r + 1)/r$. На сегменте $[-1, t_1]$ (соответственно, $[\tau_1, 1]$) функция $f \in Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ приближается интерполяционным полиномом $P_s(t, [-1, t_1])(P_s(t, [\tau_1, 1]))$, который строится следующим образом. Обозначим через $\zeta_k (k = 1, 2, \dots, s)$ нули полинома Чебышева первого рода степени s, наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1, 1]$. Отобразим сегмент $[\zeta_1, \zeta_s] \subset [-1, 1]$ на сегмент $[-1, t_1]([\tau_1, 1])$ таким образом, чтобы точки ζ_1 и ζ_s перешли в точки -1 и t_1 (τ_1 и 1).

Точки, являющиеся образами точек ζ_i при отображении сегмента $[\zeta_1, \zeta_s]$ на сегмент $[-1, t_1]$ $([\tau_1, 1])$, обозначим через $\{\zeta_i{}'\}(\{\zeta_i{}''\}), i = 1, 2, \dots, s$. По узлам $\{\zeta_i'\}(\{\zeta_i{}''\})$ строится интерполяционный полином $P_s(t, [-1, t_1])(P_s(t, [\tau_1, 1]))$ степени $s - 1$. На остальных сегментах
$[t_k, t_{k+1}]([\tau_{k+1}, \tau_k])$ аппроксимация осуществляется интерполяционными полиномами $P_s(t, [t_k, t_{k+1}])(P_s(t, [\tau_{k+1}, \tau_k]))$. Построенный таким образом сплайн обозначим через f_N. Нетрудно видеть, что $\| f - f_N \| \leq$
$\leq AN^s$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно вспомнить соотношение $\delta_n \leq 2d_n$, приведенное на с. 20 книги [149].

Теорема 1.2 [30],[33],[36]. Пусть $\Omega = [-1,1]$. Тогда справедлива оценка

$$\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Оценка $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s}$ следует из того, что класс функций W^s вложен в класс $(Q_{r,\gamma}(\Omega, M))$, и из оценки поперечников Бабенко $\delta_n(W^s) \geq An^{-s}$ на классе W^s [149]. Сплайн, реализующий эту оценку, построен при доказательстве теоремы 1.1, где в качестве параметра следует взять $v = s/(s-\gamma)$.

1.2. Поперечники на классе $\mathbf{Q_{r,\gamma}([-1,1]^l, M)}$ функций многих переменных

Теорема 1.3 [30],[33],[36]. Пусть $\Omega = [-1,1]^l, l \geq 2$. Тогда справедлива оценка $\delta_n(Q_r(\Omega, M)) \asymp d_n((Q_r(\Omega, M)), C) \asymp n^{-r/(l-1)}$.

Доказательство. Обозначим через Δ_k множество точек $x = (x_1, \dots, x_l)$ из Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству $(k/N)^v \leq \rho(x, \Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$, где $v = (2r+1)/r$. В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$. Общее число кубов, которые можно разместить в области Ω, оценивается неравенствами

$$1+m\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{2(N^v-(k+1)^v)}{(k+1)^v-k^v}\right]^{l-1} \leq n \leq 1+m\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left[\frac{2(N^v-k^v)}{(k+1)^v-k^v}\right]+1\right)^{l-1},$$

где $m-$ число граней куба $\Omega, [\alpha]-$ целая часть числа α.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=0}^{N-1}(N^v k^{1-v}-k)^{l-1} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{l-1}(-1)^j C^j_{l-1}(N^v k^{1-v})^{l-1-j}k^j =$$

$$= A\begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1); \\ N^l & \text{при } v < l(l-1); \\ N^l \ln N & \text{при } v = l(l-1). \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$n \asymp \begin{cases} N^{v(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1); \\ N^l & \text{при } v < l(l-1); \\ N^l \ln N & \text{при } v = l(l-1). \end{cases} \qquad (1.1)$$

Пусть $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \dots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ построим функцию $\psi(x_1, \dots, x_l) =$

$$= A\frac{(x_1-b^k_{i_1})^{2r+1}(b^k_{i_1+1}-x_1)^{2r+1}\dots(x_l-b^k_{i_l})^{2r+1}(b^k_{i_l+1}-x_l)^{2r+1}}{h_k^{(2r+1)(2l-1)}((k+1)/N)^{(2r+1)(r+1)/r}},$$

где константа A подбирается из требования, чтобы $\psi(x_1, \dots, x_l) \in$ $\in Q_r(\Omega, M)$.

Максимальное значение функции $\psi(x_1, \dots, x_l)$ в каждом кубе равно $AN^{-(2r+1)} = An^{-r/(l-1)}$. Таким образом, в кубе Ω расположено $n =$
$= AN^{v(l-1)}$ кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, в каждом из которых функция $\psi(x_1, \dots, x_l)$ принимает максимальное значение $An^{-r/(l-1)}$. Используя результаты, изложенные в книге [149, с.25 − 27], получаем оценку снизу.

Построим сплайн $f(t_1, \dots, t_l)$, реализующий эту оценку. Выше было описано разбиение куба Ω на области Δ_k. Построение сплайна начнем с куба Δ_{N-1}. В этом кубе функцию $f(t_1, \dots, t_l)$ аппроксимируем интерполяционным полиномом

$$f_N(t_1, \dots, t_l; \Delta_{N-1}) = P_{2r+1,\dots,2r+1}(f(t_1, \dots, t_l), \Delta_{N-1}).$$

Здесь $P_{2r+1,\dots,2r+1} = P^{t_1}_{2r+1} \dots P^{t_l}_{2r+1}$, а через $P^{t_i}_{2r+1}$ обозначен многочлен, построенный при доказательстве теоремы 1.1 и действующий по переменной $t_i, i = 1, 2, \dots, l$.

Перейдем к области Δ_{N-2}. Эта область разбивается на кубы $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$, причем разбиение происходит таким образом, чтобы вершины куба Δ_{N-1} входили в число точек разбиения. В каждом из кубов $\Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}$ полином $f_N(t_1, \dots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l})$ определяется формулой

$$f_N(t_1, \dots, t_l; \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}) = P_{2r+1,\dots,2r+1}(\overline{f}(t_1, \dots, t_l), \Delta^{N-2}_{i_1,\dots,i_l}),$$

где функция $\overline{f}(t_1, \dots, t_l)$ равна $f(t_1, \dots, t_l)$ во всех узлах интерполирования, кроме тех, которые расположены на гранях куба Δ_{N-1}. В этих узлах значения $\overline{f}(t_1, \dots, t_l)$ полагаются равными значениям полинома $P_{2r+1,\dots,2r+1}(f(t_1, \dots, t_l); \Delta_{N-1})$.

Описанным образом проводится аппроксимация во всех областях Δ^i при $i \geq 0$. Полученный в результате объединения полиномов сплайн обозначим через $f_N(t_1, \dots, t_l)$.

Нетрудно видеть, что сплайн $f_N(t_1, \dots, t_l)$ непрерывен в Ω, имеет размерность $n = AN^{(2r+1)(l-1)/r}$ и что справедлива оценка

$$\|f(t_1, \dots, t_l) - f_N(t_1, \dots, t_l)\|_C \leq AN^{-(2r+1)} = An^{-r/(l-1)}.$$

Следовательно,$d_n(Q_r(\Omega, M)) \leq An^{-r/(l-1)}$.

Из полученных выше оценок и неравенства $\delta_{2n+1}(X) \leq 2d_n(X, B)$ следует справедливость теоремы.

Теорема 1.4 [30],[33],[36]. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l, l \geq 2$. Справедлива оценка

$$d_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp \delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{при} \quad v > l/(l-1); \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{при} \quad v = l/(l-1); \\ n^{-s/l} & \text{при} \quad v < l/(l-1) \end{cases} \tag{1.2}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Доказательство. Вначале оценим снизу величину $\delta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M))$. Обозначим через Δ_k множество точек $x = (x_1, \ldots, x_l) \in \Omega$, расстояние $\rho(x, \Gamma)$ которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству $(k/N)^v \le \rho(x, \Gamma) \le ((k+1)/N)^v$, где $v = s/(s-\gamma)$.

Как и при доказательстве теоремы 1.3, разбиваем области Δ_k на кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, причем $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [b^k_{i_1}, b^k_{i_1+1}; \ldots; b^k_{i_l}, b^k_{i_l+1}]$. Введем функцию

$$\psi(x_1, \ldots, x_l) = A \frac{((x_1 - b^k_{i_1})(b^k_{i_1+1} - x_1) \ldots (x_l - b^k_{i_l})(b^k_{i_l+1} - x_l))^s}{h_k^{(2l-1)}((k+1)/N)^{v\gamma}}.$$

Константа A подбирается из требования, чтобы $\psi(x) \in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Максимальное значение функции ψ в каждом кубе равно AN^{-s}. Учитывая соотношение (1.1), получаем оценку снизу поперечника Бабенко, выражаемую правой частью соотношения (1.2).

Сплайн, реализующий эту оценку, строится аналогично сплайну
$f_N(x_1, \ldots, x_l)$ (отличие заключается в том, что в данном случае $v =$
$= s/(s-\gamma)$ вместо $v = (2r+1)/r$. Нетрудно видеть, что $\|f(x_1, \ldots, x_l) -$
$- f_N(x_1, \ldots, x_l)\|_C \le AN^{-s}$.

Следовательно, $d_n \le AN^{-s}$, и, учитывая (1.1), получаем вторую часть соотношения (1.2).

Завершается доказательство теоремы сравнением оценок снизу и сверху для поперечников Бабенко и Колмогорова и использованием соотношения $\delta_{2n+1} \le 2d_n$.

2. Аппроксимация сплайнами на классе $\mathbf{B}_{\mathbf{r},\gamma}(\boldsymbol{\Omega})$ функций одной переменной

В этом параграфе результаты, полученные в §1, распространяются на класс $B_{r,\gamma}$.

Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Построим локальный сплайн $\varphi_N(t)$, аппроксимирующий функцию $\varphi(t)$ из класса $B_{r,\gamma}(\Omega)$ на сегменте $[-1, 1]$.

Разобьем сегмент $[-1, 1]$ на более мелкие сегменты $\Delta_k =$
$[t_k, t_{k+1}]$,
$\overline{\Delta}_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$, точками $t_0 = -1, t_k = -1 + (e^{k-1}/e^N)^v, \tau_0 = 1, \tau_k =$

$= 1-(e^{k-1}/e^N)^v$, где $k=1,\ldots,N+1$; причем $v=1/w, w=2Ae$ при $2Ae>1$ и $v=\ln 2$ при $2Ae\le 1$.

На сегменте Δ_0 (аналогично $\overline{\Delta}_0$) функция $\varphi(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $\varphi_{r-1}(t,\Delta_0,-1)$ $(\varphi_{r-1}(t,\bar{\Delta}_0,1))$; на сегментах Δ_k (аналогично $\bar{\Delta}_k$) функция $\varphi(t)$ аппроксимируется отрезком ряда Тейлора $\varphi_{s-1}(t,\Delta_k,t_k)$, $(\varphi_{s-1}(t,\bar{\Delta}_k,\tau_k))$, где $s=[rN/(2Ae)]+1$ при $w>1$ и $s=[rN/(1+\log e)]+1$ при $w\le 1$. Обозначим через $\varphi_N(t)$ локальный сплайн, состоящий из полиномов φ_r и φ_{s-1}.

Оценим погрешность аппроксимации функции $\varphi(t)$ сплайном $\varphi_N(t)$.

Вначале рассмотрим случай, когда $w>1$.

На сегменте Δ_0 (аналогично $\overline{\Delta}_0$)

$$|\varphi(t)-\varphi_N(t)|\le \frac{CA^r r^r}{r!}e^{-Nrv}\le Ce^{-rN/2Ae}.$$

На сегментах $\Delta_k(k=1,2,\ldots,N)$(аналогично $\overline{\Delta}_k$)

$$|\varphi(t)-\varphi_N(t)|\le \frac{CA^s s^s}{s!}h_k^s\left(\frac{e^N}{e^{k-1}}\right)^{(s-r)v} = \frac{CA^s s^s}{\sqrt{2\pi s}}\frac{e^{(k-1)rv}}{e^{Nrv}}(e^v-1)^s\le$$

$$\le \frac{CA^s s^s}{\sqrt{2\pi s}}(e^v-1)^s\le \frac{CA^s s^s}{\sqrt{2\pi s}}\left(\frac{2}{w}\right)^s=\frac{C}{\sqrt{s}}e^{-s}=\frac{C}{\sqrt{N}}e^{-rN/(2Ae)}.$$

Так как локальный сплайн $\varphi_N(t)$ имеет $2N+1$ узел, а в каждом узле используются значения функции $\varphi(t)$ и ее производных до $[rN/2Ae]+1$ порядка включительно, то общее число функционалов, используемое при построении локального сплайна, равно $n=(2N+$
$+1)([rN/2Ae]+1)$. Отсюда $N>(1+o(1))\sqrt{Ane/r}$. Следовательно, при $w>1$

$$|\ \varphi(t)-\varphi_N(t)\ |\le Ce^{-rN/2Ae}\le Ce^{-\sqrt{nr}/2e\sqrt{A}}.$$

Пусть теперь $w\le 1$. На сегменте Δ_0 (аналогично $\overline{\Delta}_0$)

$$|\ \varphi(t)-\varphi_N(t)\ |\le \frac{CA^r r^r}{r!}e^{-Nrv}\le Ce^{-rNln2}\le C2^{-rN}.$$

На сегментах $\Delta_k(k=1,2,\ldots,N)$ (аналогично $\overline{\Delta}_k$)

$$|\ \varphi(t)-\varphi_N(t)\ |\le \frac{CA^s s^s}{s!}h_k^s\left(\frac{e^N}{e^{k-1}}\right)^{(s-r)v}=\frac{CA^s s^s}{\sqrt{2\pi s}}(e^v-1)^s\le$$

$$\leq \frac{CA^s s^s}{\sqrt{2\pi s}} = \frac{C}{\sqrt{2\pi s}} 2e^{-s} \leq C2^{-rN}.$$

Общее число функционалов, используемых при построении сплайна $\varphi_N(t)$ в случае, когда $w < 1$, равно

$$n = (2N+1)([rN/(1+\log e)]+1) = (1+o(1))2rN/(1+\log_2 e).$$

Отсюда

$$N = (1+o(1))\sqrt{n(1+\log e)/2r} > (1+o(1))\sqrt{n/r}.$$

Таким образом, погрешность аппроксимации при $w < 1$ оценивается неравенством $\mid \varphi(t) - \varphi_N(t) \mid \leq C2^{-rN} \leq C2^{-\sqrt{rn}} \leq Ce^{-\sqrt{rn}\ln 2}$.

3. Оптимальные методы восстановления на классе $\mathbf{B}_{\mathbf{r},\gamma}(\mathbf{\Omega})$ функций многих переменных

На протяжении этого параграфа нам неоднократно понадобится проведение усреднения различных функций. В связи с этим приведем условия, налагаемые на ядра усреднения [144, с.104]. При этом условие 4) нам понадобится в более сильной форме, нежели в [144].

Наложим на функцию $\omega_h(x,y)$ переменных $x=(x_1,\ldots,x_l), y=$ $=(y_1,\ldots,y_l)$, определенную в R^l и зависящую от параметра h, следующие условия:

1) $\operatorname{supp}\omega_h(x,y)\subset\{(x,y):\mid x-y\mid< Kh\}, K>0$, т.е. носитель функции ω_h лежит в "диагональной полоске", ширина которой порядка h;

2) $0\le\omega_h(x,y)\le Kh^{-l}$;

3) $\int_{R^l}\omega_h(x,y)dy=1$ (условие нормировки);

4) $\omega_h(x,y)$ имеет непрерывные производные до любого порядка по совокупности переменных x и y, причем

$$\mid D_x^\alpha D_y^\beta\omega_h(x,y)\mid\le KA^v v^v h^{-l-|\alpha|-|\beta|},\ v=\mid\alpha\mid+\mid\beta\mid.$$

Возьмем в качестве $\omega(x)$ функцию, имеющую непрерывные производные любого порядка, равную нулю вне куба $[-1,1]^l$ и удовлетворяющую условию нормировки. Потребуем, чтобы производные функции $\omega(x)$ удовлетворяли неравенствам

$$\mid\frac{\partial^{|v|}\omega(x)}{\partial^{v_1}x_1\ldots.\partial^{v_l}x_l}\mid\le A^{|v|}\mid v\mid^{|v|},$$

где $v=(v_1,\ldots,v_l),\mid v\mid=v_1+\ldots+v_l, A=$ const.

Функцию $\omega_h(x,y)$ можно теперь определить по формуле $\omega_h(x,y)=$ $=h^{-l}\omega((x-y)/h)$.

Теорема 3.1 [39]. Пусть $\Omega=[-1,1]^l, l\ge 2$. Справедлива оценка

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega))\ge An^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через Δ_0 множество точек $x\in\Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам $0\le\min\limits_{1\le i\le l}\min(\mid -1-x_i\mid,\mid 1-x_i\mid)\le 2^{-N}$. Обозначим через $\Delta_k, k=1,2,\ldots,N$, множество точек $x\in\Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2^{k-1}}{2^N}\le\min_{1\le i\le l}\min(\mid -1-x_i\mid,\mid 1-x_i\mid)\le\frac{2^k}{2^N}.$$

В каждой области $\Delta_k, k=0,1,\dots,N$, разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ с гранями, параллельными граням куба Ω, и с ребрами, имеющими длину $h_k = 2^k/2^N, k=0,1,\dots,N-1$. То обстоятельство, что в каждой области $\Delta_k, k=0,1,\dots,N$, может оказаться 2^l параллелепипедов с гранями, параллельными граням куба Ω, не влияет на общность рассуждений. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}, k=0,1,\dots,N$, разместим куб $\Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}, k=0,1,\dots,N$, с гранями, параллельными граням куба Ω, центр симметрии которого совпадает с центром симметрии куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}, k=0,1,\dots,N$, а длина ребра h^*_k которого равна $h^*_k = h_k/8$.

Каждому кубу $\Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}$ поставим в соответствие функцию

$$L^k_{i_1,\dots,i_l}(x) = \begin{cases} 1, & x\in \Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}, \\ 0, & x\notin \Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}. \end{cases}$$

Каждой функции $L^k_{i_1,\dots,i_l}(x)$ поставим в соответствие среднюю функцию, определяемую формулой

$$L^{*k}_{i_1,\dots,i_l}(x) = (h^*_k)^{-l+r+1-\gamma}\int\limits_{\Omega}\omega\left(\frac{y-x}{h^*_k}\right)L^k_{i_1,\dots,i_l}(y)dy, \qquad (3.2)$$

где $\omega(x/h^*_k)-$ ядро усреднения, удовлетворяющее перечисленным выше условиям.

При выполнении этих условий функция $L^{*k}_{i_1,\dots,i_e}(x)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$. В результате этих построений в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ построена функция $L^{*k}_{i_1,\dots,i_l}(x)$, принадлежащая классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$, равная нулю вне куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ и в центре куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ принимающая значение не меньшее, нежели $C2^{-(r-1+\gamma)N}$, причем константа C одна и та же для всех кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$.

Обозначим через n число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, образующих покрытие области Ω. Оценим число n. Очевидно,

$$1+m([2^{N+1}])^{l-1}+m\sum_{k=1}^{N-1}[\frac{2(1-2^{k-N})}{h_k}]^{l-1}\le n\le$$

$$\le 1+m([2^{N+1}]+1)^{l-1}+m\sum_{k=1}^{N-1}\left([\frac{2(1-2^{k-N})}{h_k}]+1\right)^{l-1},$$

где $m = 2^l$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1-2^{k-N}}{h_k}\right)^{l-1} \leq \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2^N-2^k}{2^{k+1}-2^k}\right)^{l-1} \leq C2^{N(l-1)}.$$

Следовательно, $n \leq C2^{N(l-1)}$. Аналогичным образом доказывается обратное неравенство $n \geq C2^{N(l-1)}$. Поэтому

$$n = C2^{N(l-1)}. \tag{3.3}$$

Таким образом, в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ построена функция $L^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x)$, принадлежащая классу функций $B_{r,\gamma}(\Omega)$, равная нулю вне куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ и достигающая в центре куба значений, не меньших нежели $C2^{-N(r+1-\gamma)}$.

Отсюда следует, что $\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \geq A2^{-N(r+1-\gamma)}$. Учитывая связь между N и n, выраженную формулой (3.3), имеем:

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \geq Cn^{-(r+1-\gamma/(l-1)}.$$

Теорема доказана.

Построим локальные сплайны, реализующие эту оценку. Один из таких сплайнов построен в [33, с. 76 − 80]. При его построении в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x)$ аппроксимировалась отрезком ряда Тейлора. В результате локальный сплайн $f_N(x)$ был разрывным.

Построим локальный сплайн таким образом, чтобы в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x)$ аппроксимировалась интерполяционными полиномами. Это позволит построить сплайн, непрерывный в Ω, и тем самым оценить сверху поперечник Колмогорова. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$. Покроем область Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, построение которых было описано выше при доказательстве теоремы 1.3.

Построение локального сплайна начнем с куба Δ^N. В кубе Δ^N функция $f(x)$ интерполируется полиномом $P_{m,\ldots,m}(f,\Delta^N)$, где $m = [4^{(r+1-\gamma)}AN] + 1$.

Перейдем к области Δ^{N-1}. Эта область разбивается на кубы $\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l}$, причем разбиение проводится таким образом, чтобы вершины куба $\Delta^N_{i_1,\ldots,i_l}$ входили в число точек разбиения. В каждом кубе $\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $f(x)$ интерполируется полиномом $P_{m,\ldots,m}(\overline{f},\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l})$, где $\overline{f}(x) = P_{m,\ldots,m}(f,\Delta^N)$ на пересечении куба $\Delta^N_{i_1,\ldots,i_l}$ и области Δ^{N-1} и $\overline{f}(x) = f(x)$ во всех остальных точках куба $\Delta^{N-1}_{i_1,\ldots,i_l}$.

Аналогичным образом проводятся построения в кубах $\Delta^k_{i_2,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N-2$.

Полученный в результате описанных построений сплайн обозначим через $f_N(x)$. Нетрудно видеть, что этот сплайн непрерывен в области Ω.

Оценим погрешность аппроксимации функции $f(x)$ сплайном $f_N(x)$.

При этом будем пользоваться следующими известными оценками точности аппроксимации полиномами.

Лемма 3.1 [150, с. 276]. Если функция $f(x)$, заданная на $[-1, 1]$, имеет там r-ю ($r \geq 0$ целое) непрерывную производную, то существует константа M_r, не зависящая от f, x и n, такая, что для любого $n > r$ найдется обыкновенный многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, степени не выше, чем n, удовлетворяющий для каждого $x \in [-1, 1]$ неравенству

$$|f(x) - P_n(x) \leq$$
$$\leq M_r \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n} \right) \right]^r \omega \left[\frac{1}{n} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n} \right) \right], \tag{3.5}$$

где $\omega(t) = \omega(f^{(r)}; t)$ есть модуль непрерывности r-й производной.

Пусть $x \in \Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$. Тогда

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq C h_0^{(r+1-\gamma)} \leq C 2^{-N(r+1-\gamma)}. \tag{3.6}$$

Пусть $x \in \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Тогда, используя при получении оценок производные до N-го порядка, имеем:

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq \frac{A^N N^N 2^{k(r+1-\gamma)}}{2^{N(r+1-\gamma)}} \frac{1}{m^N} ln^l N \leq C 2^{-N(r+1-\gamma)}. \tag{3.7}$$

Из оценок (3.6), (3.7) имеем

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq C 2^{-N(r+1-\gamma)}. \tag{3.8}$$

Обозначим через n_1 число функционалов, используемых при построении локального сплайна $f_N(x)$. Очевидно, $n_1 = [C m^l 2^{N(l-1)}] + 1$. Отсюда

$$N = \frac{1}{l-1} \log_2 n_1 - \frac{l(1+o(1))}{l-1} \log_2 \log_2 n_1 \leq \frac{1}{l-1} \log_2 n_1.$$

Из этого выражения и неравенства (3.8) следует оценка

$$\| f(x) - f_N(x) \|_C \leq C n_1^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}. \tag{3.9}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.2 [39]. Справедлива оценка сверху $d_n(B_{r,\gamma}(\Omega), C) \leq$ $\leq Cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}$.

Из сопоставления оценок (3.2) , (3.9) и известного [149] неравенства $\delta_n \leq 2d_n$, связывающего поперечники Бабенко и Колмогорова, вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.3 [39]. Справедлива оценка

$$d_n(B_{r,\gamma}(\Omega), C) \asymp n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}.$$

4. Поперечники и локальные сплайны на классах функций $\mathbf{Q}^*_{\mathbf{r},\gamma}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{M})$ и $\mathbf{B}^*_{\mathbf{r},\gamma}(\mathbf{\Omega})$

При построении приближенных методов решения слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра нам понадобятся оптимальные методы аппроксимации функций, принадлежащих компактам
$Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)$ и $B^*_{r,\gamma}(\Omega)$.

Теорема 4.1 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0, T]$. Справедливы оценки

$$\delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp d_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)) \asymp n^{-s}.$$

Доказательство. Пусть N и $n-$ целые числа, связанные формулой $N = ns$. Разобьем сегмент $[0, T]$ на n частей точками $v_k = T(\frac{k}{n})^q$, $k = 0, 1, \ldots, n$, где $q = s/(s-\gamma)$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k =$
$= [v_k, v_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Через $P_s(f, \Delta_k)$ обозначим интерполяционный полином, аппроксимирующий функцию $f(t)$, $t \in \Delta_k$, построение которого было неоднократно описано выше. Полином $P_s(f, \Delta_k)$ может быть построен как по узлам полинома Чебышева первого рода, так и по узлам полинома Лежандра. Локальный сплайн, определенный на сегменте $[0, T]$ и составленный из полиномов $P_s(f, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, обозначим через $f_n(t)$. Нетрудно видеть, что погрешность аппроксимации функции $f(t)$ локальным сплайном $f_n(t)$ оценивается неравенством $\|f(t) - f_n(t)\| \leq An^{-s}$. Повторяя рассуждения, проведенные в \$1, находим верхнюю грань оценки снизу поперечника Бабенко $\delta_n(Q^*_{r,\gamma})(\Omega, M) \geq A/n^s$. Учитывая известное неравенство $\delta_n \leq 2d_n$, связывающее n-поперечники Бабенко и Колмогорова, убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 4.2 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0, T]^2$. Справедливы оценки

$$\delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp d_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp \begin{cases} n^{-(s-\gamma)}, & \text{при} \quad v>2; \\ n^{-(s-\gamma)}\ln n, & \text{при} \quad v=2; \\ n^{-s/2}, & \text{при} \quad v<2, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Доказательство. Вначале найдем верхнюю грань оценки снизу поперечника Бабенко. Для этого разделим область Ω на части $\Delta_k,\ k=0,1,\ldots,N-1$. Здесь через Δ_k обозначено множество точек из Ω, удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v T \le \rho(t,\Gamma_0) \le \left(\frac{k+1}{N}\right)^v T,\ k=0,1,\ldots,N-1,\ t=(t_1,t_2).$$

Пусть $h_k = \left(\frac{k+1}{N}\right)^v T - \left(\frac{k}{N}\right)^v T,\ k=0,1,\ldots,N-1$. Каждую из областей Δ_k покроем квадратами $\Delta^k_{i_1,i_2}$ с ребрами, равными h_k и параллельными осям координат. В каждом квадрате $\Delta^k_{i_1,i_2} = [a^k_{i_1}, a^k_{i_1+1}; b^k_{i_2}, b^k_{i_2+1}]$ построим функцию

$$\Psi^k_{i_1,i_2}(t) = A\frac{((t_1-a^k_{i_1})(a^k_{i_1+1}-t_1)(t_2-b^k_{i_2})(b^k_{i_2+1}-t_2))^s}{h_k^{3s}((k+1)/N)^{v\gamma}}.$$

Константа A выбирается из условия, чтобы $\Psi^k_{i_1,i_2} \in Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)$.

Оценим максимум функции $\Psi^k_{i_1,i_2}(t)$. Очевидно,

$$|\Psi^k_{i_1,i_2}(t)| \ge Ah^s\left(\frac{N}{k+1}\right)^{v\gamma} = A\frac{(k+v)^{(v-1)s}}{(k+1)^{v\gamma}}\frac{1}{N^{v(s-\gamma)}}.$$

Величина v выбирается из требования, чтобы $\max\limits_t |\Psi^k_{i_1,i_2}(t)|$ не зависел от номера k. Для этого достаточно, чтобы $v = s/(s-\gamma)$. Следовательно,

$$|\Psi^k_{i_1,i_2}(t)| \ge \frac{A}{N^s}. \tag{4.2}$$

Введем функцию $\Psi(t)$, которая на каждом из квадратов $\Delta^k_{i_1,i_2}$ равна $\Psi^k_{i_1,i_2}(t)$. Применяя теорему Борсука, имеем $\delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)) \ge A/N^s$.

Обозначим через n число квадратов $\Delta^k_{i_1,i_2}$, входящих в покрытие области Ω. Нетрудно видеть, что

$$n = 2\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T-\left(\frac{k}{N}\right)^v T}{h_k} - N = 2\sum_{k=0}^{N-1}\frac{N^v-k^v}{(k+1)^v-k^v} - N \asymp$$

$$\asymp N^v + 2\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N^v - k^v}{(k+\theta)^{v-1}} \asymp \begin{cases} N^v, & \text{при } v > 2; \\ N^v \ln N, & \text{при } v = 2; \\ N^2, & \text{при } v < 2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Следовательно,

$$\delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq \begin{cases} n^{-(s-\gamma)}, & \text{при } v > 2; \\ n^{-(s-\gamma)} \ln n, & \text{при } v = 2; \\ n^{-s/2}, & \text{при } v < 2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Построим непрерывный локальный сплайн, реализующий оценку (4.4). В первом параграфе было описано построение интерполяционного полинома $P_s[f,[a,b]]$. Введем проекционный оператор $P_s[f,[a,b;c,d]] = P_s^{t_2}[P_s^{t_1}[f,[a,b]],[c,d]]$.

Построение локального сплайна начнем с области Δ_{N-1}. В этой области функция $f(t_1,t_2)$ заменяется интерполяционным полиномом $P_s[f,\Delta_{N-1}]$. Приступая к построению локального сплайна в области Δ_{N-2}, предварительно покроем ее квадратами $\Delta^{N-2}_{i_1,i_2}$, с ребрами длиной не более h_{N-2}, параллельными осям координат, причем вершины квадрата Δ_{N-1}, расположенные на границе с Δ_{N-2}, являются также вершинами соответствующих квадратов из множества $\Delta^{N-2}_{i_1,i_2}$. В квадратах $\Delta^{N-2}_{i_1,i_2}$ функция $f(t_1,t_2)$ приближается интерполяционным полиномом $P_s[f,\Delta^{N-2}_{i_1,i_2}]$, причем на сторонах $\Delta^{N-2}_{i_1,i_2}$, общих с Δ_{N-1}, в качестве интерполируемой функции берется не $f(t_1,t_2)$, а $P_s[f,\Delta_{N-1}]$. Подобным образом строится сплайн и в областях $\Delta_k,\ k=0,1,\ldots,$
$N-3$. Сплайн, составленный из полиномов $P_s[f,\Delta^k_{i_1,i_2}]$, обозначим через $f^*_s(t_1,t_2)$. Нетрудно видеть, что

$$\|f(t) - f^*_s(t)\|_C \leq AN^{-s}. \tag{4.5}$$

Из этой оценки, непрерывности сплайна и неравенства (4.3) следует правая часть соотношения (4.1). Воспользовавшись известным неравенством $\delta_n \leq 2d_n$, завершаем доказательство теоремы.

Теорема 4.3 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0,T]^l,\ l = 2,3,\ldots$. Справедливы оценки $d_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp \delta_n(Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp m(n,v)$, где

$$m(n,v) = \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & \text{при } v > \frac{l}{l-1}; \\ n^{-s/l}(lnn)^{s/l}, & \text{при } v = \frac{l}{l-1}; \\ n^{-s/l}, & \text{при } v < \frac{l}{l-1}. \end{cases}$$

Теорема 4.3 является частным случаем теоремы 4.4. Так как обе теоремы доказываются аналогично, то доказательство теоремы 4.3 опускается.

Теорема 4.4 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0,T]^l,\ l = 2,3,\dots$. Справедливы оценки $\delta_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp d_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)) \asymp n^{-s/l}$.

Доказательство. Вначале оценим снизу поперечник Бабенко $\delta_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M))$. Для этого покроем область Ω кубами, которые строятся следующим образом. Куб $\Delta^1_{1,\dots,1}$ является пересечением областей $(0 \le t_1 \le \left(\frac{1}{N}\right)^v T) \cap \dots \cap (0 \le t_l \le \left(\frac{1}{N}\right)^v T)$, $v = s/(s-\gamma)$. Область Δ^2 определяется следующим образом

$$\Delta^2 = \Delta'_2 \setminus \Delta'_1, \quad \text{где } \Delta'_k = \left\{(t_1,\dots,t_l):\ 0 \le t_1,\dots,t_l \le \left(\frac{2}{N}\right)^v T\right\}.$$

Область Δ^2 покрывается кубами с ребрами, параллельными координатным осям и равными $h_2 = \left(\frac{2}{N}\right)^v T - \left(\frac{1}{N}\right)^v T$. Полученные области обозначим через $\Delta^2_{i_1,\dots,i_l}$.

Дальнейшее построение проводится по аналогии.

В качестве Δ^k берутся области $\Delta^k = \Delta'_k \setminus \Delta'_{k-1},\ k = 3,\dots,N-1$. Каждая область Δ^k покрывается кубами и параллелепипедами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ с ребрами, параллельными координатным осям. Длины ребер кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ равны $h_k = \left(\frac{k}{N}\right)^v T - \left(\frac{k-1}{N}\right)^v T$.

В областях $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ по аналогии с доказательством теоремы 4.2 вводятся функции $\Psi^k_{i_1,\dots,i_l}$, а затем в области Ω вводится функция $\Psi(t_1,\dots,t_l)$. Можно показать, что $|\Psi(t_1,\dots,t_l)| \ge A_1/N^s$.

Определим число n прямоугольников $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Нетрудно видеть, что

$$n \asymp \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v}{\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v}\right]^{l-1} \asymp \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{(k+1)^v}{(k+\theta)^{v-1}}\right]^{l-1} \asymp \sum_{k=1}^{N-1} k^{l-1} \asymp N^l.$$

Следовательно, $\delta_n(Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)) \ge An^{-s/l}$.

Построение локального сплайна $f^{**}_s(t_1,\dots,t_l)$ и дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с доказательством теоремы 4.2. Теорема доказана.

Теорема 4.5 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0,T]$. Справедливы оценки

$$\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp d_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp 2^{-n(r+1-\gamma)}.$$

Доказательство. Утверждение этой теоремы является частным случаем теоремы 4.6, приведенной ниже.

Теорема 4.6 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0,T]^l,\ l = 2,3,\dots,\ 0 \le \gamma \le$

≤ 1. Справедливы оценки $\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp d_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp \frac{1}{n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}}$.
Доказательство. Обозначим через Δ_0 множество точек $t \in \Omega$, таких, что $0 \leq \rho(t, \Gamma_0) \leq 2^{-N}$, а через Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, – множество точек $t \in \Omega$, таких, что $2^{k-1-N} \leq \rho(t, \Gamma_0) \leq 2^{k-N}$.

Покроем каждую область Δ_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ с гранями, параллельными граням куба Ω, и с ребрами, имеющими длину $h_k = 2^k/2^N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Оценим n – общее число элементов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ покрытия области Ω. Очевидно,

$$n \asymp l \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1 - \frac{2^{k-1}}{2^N}}{\frac{2^k}{2^N} - \frac{2^{k-1}}{2^N}} \right]^{l-1} \asymp \sum_{k=1}^{N} \left(2^{N-k+1} - 1\right)^{l-1} \asymp \sum_{k=1}^{N} \frac{2^{(N+1)(l-1)}}{2^{k(l-1)}} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{2^{l-1} - 1} (2^{(N+1)(l-1)} - 2^{l-1}).$$

Таким образом, $n \asymp 2^{N(l-1)}$. Повторяя рассуждения, проведенные в § 3, можно показать,что $\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp 2^{-N(r+1-\gamma)}$. Следовательно, получаем $\delta_n(B^*_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}$.

Учитывая известное неравенство $\delta_n \leq 2d_n$, связывающее n-поперечники Бабенко и Колмогорова, завершаем доказательство теоремы.
Теорема 4.7 [53], [165]. Пусть $\Omega = [0, T]^l$, $l = 2, 3, \ldots$. Справедливы оценки

$$\delta_n(B^{**}_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp d_n(B^{**}_{r,\gamma}(\Omega)) \asymp 2^{-\frac{n(r+1-\gamma)}{2^l - 1}}.$$

Доказательство теоремы проводится по аналогии с доказательством теоремы 4.6.

Замечание. В заключение этой главы приведем оценки поперечников Бабенко и Колмогорова на классе $\tilde{Q}_{r\gamma}(\Omega, M)$.

Определение 4.1. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$ $l = 1, 2, \cdots$. Функция $\varphi(x_1, \ldots, x_l) \in \tilde{Q}_{r\gamma}(\Omega, M)$ если выполнены условия
$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|v|}\varphi(x)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M$ при $0 \leq |v| < r - 1$,
$|\partial^{|v|}\varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M(1 + \ln |\rho(x, \Gamma)|)$ при $|v| = r$,
$|\partial^{|v|}\varphi(x_1, \ldots, x_l)/\partial x_1^{v_1} \cdots \partial x_l^{v_l}| \leq M/\rho(x, \Gamma)^{|v|-r}$ при $r < |v| < s$,
где $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $v = (v_1, \ldots, v_l)$, $|v| = v_1 + \cdots + v_l$, $\gamma = s - r$.

Теорема 4.7. Пусть $\Omega = [-1, 1]$. Справедливы оценки

$$\delta_n(\tilde{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{-s};$$

$$d_n(\tilde{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M), c) \leq An^{-s}\ln n.$$

Теорема 4.8. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 2,3,\cdots$. Справедливы оценки

$$\delta_n(\tilde{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq A \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{при} \quad v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l} & \text{при} \quad v = l/(l-1), \\ n^{-s/l} & \text{при} \quad v < l/(l-1), \end{cases}$$

$$d_n(\tilde{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)) \leq A \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}\ln n & \text{при} \quad v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{1+s/l} & \text{при} \quad v = l/(l-1), \\ n^{-s/l}\ln n & \text{при} \quad v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/r$.

ГЛАВА II

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА И ВОЛЬТЕРРА

1. Классические методы приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма

Подробные обзоры приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма даны в монографиях [83], [91], [92].

В этом параграфе, следуя монографиям [91], [92], дается описание классических приближенных методов решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

1.1. Методы коллокации и механических квадратур

Наиболее употребительными и просто реализуемыми являются методы коллокации и механических квадратур. Изложим эти методы на примере одномерного интегрального уравнения

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{1.1}$$

Приближенное решение уравнения (1.1) будем искать в виде интерполяционного полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \psi_k(t) \tag{1.2}$$

с неизвестными коэффициентами x_k. Здесь $\psi_k(t)$ − фундаментальные полиномы степени $n-1$ по узлам t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, полиномов Лежандра степени n.

Подставляя $x_n(t)$ в уравнение (1.1) вместо неизвестной функции $x(t)$ и приравнивая левые и правые части полученного выражения в узлах t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем метод коллокации:

$$K_n x_n \equiv x_n(t_k) + \int_{-1}^{1} h(t_k,\tau)x_n(\tau)d\tau = f(t_k),\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

В уравнении (1.3) интегралы могут быть вычислены по квадратурной формуле Гаусса. В результате приходим к методу механических квадратур

$$K_n^* x_n \equiv x_n(t_k) + \sum_{l=1}^{n} p_l h(t_k, t_l) x_n(t_l) = f(t_k),\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Здесь $p_l,\ l = 1, 2, \ldots, n$ – коэффициенты квадратурной формулы Гаусса по узлам полиномов Лежандра.

Проведем обоснование методов коллокации и механических квадратур. Обоснование будем проводить в пространстве $X = C[-1, 1]$ функций, непрерывных на сегменте $[-1, 1]$, и в его подпространстве X_n, состоящем из полиномов вида (1.2). Обозначим через P_n оператор, проектирующий X на X_n. Известно [141], что $\|P_n\| \leq An$.

Будем считать, что оператор $K \in B[X, X]$ непрерывно обратим.

Методы коллокации и механических квадратур в операторной форме записываются в виде уравнений

$$K_n x_n \equiv P_n \left[x_n(t) + \int\limits_{-1}^{1} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \right] = P_n[f] \tag{1.5}$$

и

$$K_n^* x_n \equiv P_n \left[x_n(t) + \int\limits_{-1}^{1} P_n^\tau [h(t, \tau) x_n(\tau)] d\tau \right] = P_n[f]. \tag{1.6}$$

Эквивалентность уравнений (1.3) и (1.5), а также (1.4) и (1.6) следует из известного факта теории приближений: если два алгебраических полинома степени $n-1$ равны между собой в n различных узлах, то они тождественно равны. Из этого же утверждения следует, что $P_n x_n \equiv x_n$. Поэтому уравнения (1.5) и (1.6) можно записать в более удобной форме

$$K_n x_n \equiv x_n(t) + P_n \left[\int\limits_{-1}^{1} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \right] = P_n[f(t)] \tag{1.7}$$

и

$$K_n^* x_n \equiv x_n(t) + P_n \left[\int\limits_{-1}^{1} P_n^\tau [h(t, \tau) x_n(\tau)] d\tau \right] = P_n[f(t)]. \tag{1.8}$$

Для обоснования методов коллокации и механических квадратур воспользуемся общей теорией приближенных методов, элементы которой изложены в §6 введения.

Будем считать, что $h(t, \tau) \in W^{rr}(M)$ и $f \in W^r(M)$, $r \geq 2$.

Для того, чтобы обосновать метод коллокации, нужно проверить следующее условие: для любого $x \in X$ найдется элемент $z_n \in X_n$, такой, что $\|Hx - z_n\| \leq \varepsilon_1(n) \|x\|$.

Возьмем в качестве $z_n(t)$ полином $z_n(t) = \int\limits_{-1}^{1} h_{n-1}(t, \tau) x(\tau) d\tau$, где $h_n(t,\tau)$ – полином степени n наилучшего равномерного приближения к функции $h(t,\tau)$ по переменной t. Тогда

$$\left\| \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau - z_n(t) \right\| = \left\| \int\limits_{-1}^{1} [h(t,\tau) - h_{n-1}(t,\tau)]x(\tau)d\tau \right\| \leq$$

$$\leq A\|x\| \int\limits_{-1}^{1} |h(t,\tau) - h_{n-1}(t,\tau)|d\tau \leq AE_{n-1}^t(h)\|x\|. \qquad (1.9)$$

Здесь $E_n^t(h)$ – наилучшее приближение функции $h(t,\tau)$ полиномами степени n по переменной t в квадрате $[-1,1]^2$.

Из неравенства (1.9) и оценки $\|P_n\| \leq An$ следует, что при n таких, что $q = AnE_n^t(h) < 1$, система уравнений (1.7) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|K_n^{-1}\| \leq \|K^{-1}\|/(1-q)$.

Функция $f \in W^r(M)$ приближается полиномами $f_n \in X_n$ с точностью $E_{n-1}(f)$. Из теоремы 6.2 введения следует, что $\|x^* - x_n^*\| \leq \leq An(E_{n-1}(f) + E_{n-1}^t(h))$, где x^* и x_n^* – решение уравнений (1.1) и (1.7), соответственно.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть оператор $K \in [C,C]$ непрерывно обратим, функции $h(t,\tau) \in W^{r,r}(M)$, $f(t) \in W^r(M)$, $r \geq 2$. Тогда при n таких, что $q = AnE_{n-1}^t(h) < 1$, система уравнений (1.7) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq An(E_n(f) + E_n^t(h))$, где x^* и x_n^* – решения уравнений (1.1) и (1.7), соответственно.

Для обоснования метода механических квадратур нужно найти норму разности операторов K_n и K_n^*.

Воспользовавшись тем, что квадратурная формула по узлам полиномов Лежандра является квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности (т.е. $\int\limits_{-1}^{1} P_n^\tau[h(t,\tau)x_n(\tau)]d\tau =$

$= \int\limits_{-1}^{1} P_n^\tau[h(t,\tau)]x_n(\tau)d\tau$), имеем:

$$\|K_n x_n - K_n^* x_n\| = \left\| P_n \left[\int\limits_{-1}^{1} (h(t,\tau) - P_n^\tau[h(t,\tau))]x_n(\tau)d\tau \right] \right\| \leq$$

$$\leq A\|P_n\|\|h(t,\tau) - P_n^\tau[h(t,\tau)]\|\|x_n\| \leq An^2 E_{n-1}^\tau(h).$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой Банаха, можно показать, что при $q_1 = \max(q, An^2E_{n-1}^\tau(h) < 1$, система уравнений (1.8) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^*(t) - x_n^{**}(t)\| \leq$

$An^2(E_{n-1}(f) +$
$+E^t_{n-1}(h) + E^\tau_{n-1}(h))$, где x^{**}_n − решение уравнения (1.8).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть оператор $K \in [C, C]$ непрерывно обратим, $h(t,\tau) \in W^{rr}(M)$, $f(t) \in W^r(M)$, $r \geq 3$. Тогда при n таких, что $q = A(nE^t_{n-1}(h) + n^2E^\tau_{n-1}(h)) < 1$, система уравнений (1.8) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x^{**}_n\| \leq A(nE^t_{n-1}(h) +$
$+n^2E^\tau_{n-1}(h) + E_{n-1}(f))$, где x^* и x^{**}_n - решения уравнений (1.1) и (1.8), соответственно.

Замечание 1. Несколько усложняя доказательство теоремы 1.2, можно показать, что она справедлива при $q = An(E^t_{n-1}(h) + E^\tau_{n-1}(h)) <$
< 1 и имеет место оценка $\|x^* - x^{**}_n\| \leq A(E_{n-1}(f) + n(E^t_{n-1}(h) +$
$+E^\tau_{n-1}(h)))$.

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

Замечание 2. Для приближенного решения уравнений

$$x(t) + \int_{-1}^{1} \omega(\tau)h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

где $\omega(t)$ − весовая функция, подобным образом строятся и обосновываются вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур. Отличие состоит лишь в том, что в качестве узлов коллокации и квадратурных формул берутся узлы ортогональных на сегменте $[-1, 1]$ с весом $\omega(t)$ полиномов.

1.2. Метод последовательных приближений

Рассмотрим интегральное уравнение второго рода

$$x(t) - \lambda \int\limits_a^b h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{1.10}$$

Его приближенное решение будем искать в виде ряда по целым степеням λ

$$x(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) + \dots + \lambda^n x_n(t) + \dotsb. \tag{1.11}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.10), имеем:

$$x_0(t) + \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) + \dots =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_a^b h(t,\tau)[x_0(\tau) + \lambda x_1(\tau) + \lambda^2 x_2(\tau) + \dots + \dots]d\tau.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$x_0(t) = f(t),$$

$$x_1(t) = \int\limits_a^b h(t,\tau)x_0(\tau)d\tau,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n+1}(t) = \int\limits_a^b h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau, \tag{1.12}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Система уравнений (1.12) является частным случаем метода простой итерации

$$x_{n+1}(t) = \lambda \int\limits_a^b h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau + f(t),$$

$n = 0, 1, \dots,$ если в последнем в качестве начального приближения положить $x_0 = 0$.

Введем итерированные ядра

$$h_1(t,\tau) = h(t,\tau),$$

$$h_2(t,\tau) = \int\limits_a^b h(t,v)h_1(v,\tau)dv,$$

$$h_3(t,\tau) = \int_a^b h(t,v)h_2(v,\tau)dv,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Воспользовавшись этими обозначениями, можно записать выражение для последовательных функций $x_n(t)$: $x_0(t) = f(t)$, $x_n(t) = = \int_a^b h_n(t,\tau)f(\tau)d\tau$, $n = 1, 2, \dots$.

Тогда ряд (1.11) имеет вид

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \Gamma(t,\tau,\lambda)f(\tau)d\tau,$$

где функция $\Gamma(t,\tau,\lambda)$, определяемая рядом

$$\Gamma(t,\tau,\lambda) = h_1(t,\tau) + \lambda h_2(t,\tau) + \cdots,$$

называется резольвентой уравнения (1.10).

Покажем, что при достаточно широких предположениях относительно ядер $h(t,\tau)$ и числового параметра λ ряд (1.11) сходится к решению уравнения (1.10).

Для определенности обоснование метода последовательных приближений проведем в метрике пространства $C[a,b]$. При этом будем считать, что функции $h(t,\tau)$ и $f(t)$ непрерывны.

Взяв в качестве начального приближения функцию $x_0(t)$, последовательные приближения получаем по формуле:

$$x_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau + f(t), \tag{1.13}$$

$n = 0, 1, \dots$.

К исследованию сходимости итераций применим теорему Банаха о сжатых отображениях. Для этого оценим норму

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\int_a^b \lambda h(t,\tau)(x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau))d\tau\| \le$$

$$\le |\lambda| \left(\max_t \int_a^b |h(t,\tau)|d\tau\right) \|x_n - x_{n-1}\| \le$$
$$\le |\lambda| \max_{t,\tau} |h(t,\tau)|(b-a)\|x_n - x_{n-1}\|.$$

Если $|\lambda|(b-a)\max_{t,\tau}|h(t,\tau)| \le q < 1$, то по теореме Банаха итерации (1.13) сходятся к единственному решению $x^*(t)$ уравнения

(1.10) со скоростью $\|x^* - x_n\| \leq q^n \frac{\eta_0}{1-q}$, где $\eta_0 = \|f(t) - x_0(t) - \lambda \int\limits_a^b h(t,\tau)x_0(\tau)d\tau\|$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3. Пусть функции $h(t,\tau)$ и $f(t)$ непрерывны и выполнено условие

$$|\lambda|(b-a)\max_{t,\tau}|h(t,\tau)| < 1. \tag{1.14}$$

Тогда уравнение (1.10) имеет единственное решение $x^*(t)$, к которому сходится приближение (1.13) со скоростью $\|x^* - x_n\| \leq q^n\eta_0/(1-q)$.

Пусть λ удовлетворяет условию (1.14). Тогда ряд (1.11) сходится со скоростью геометрической прогрессии, и им можно пользоваться для приближенного решения уравнения (1.10). Если интегралы (1.12) не вычисляются точно, то они могут быть с достаточно высокой степенью точности приближены квадратурными формулами. В книгах [92], [102] исследуются методы последовательных приближений с возмущениями и указаны условия, при которых они сходятся.

1.3. Метод аналитического продолжения по параметру λ

Вначале изложим, следуя [92], классический метод аналитического продолжения. Для определенности будем считать функции $h(t,\tau)$ и $f(t)$ непрерывными.

При выполнении условия (1.14) ряд (1.11) сходится в метрике пространства C в круге радиуса $r_0 < 1/((b-a)\|h(t,\tau)\|_C)$ с центром в начале координат. Так как этот ряд является функцией аналитической по λ в окрестности точки $\lambda = 0$, то он может сходиться и в более широкой области, нежели круг $R(0, r_0)$. Этот ряд сходится, по крайней мере, в круге радиуса $|\lambda_1|$ с центром в начале координат. Здесь $|\lambda_1|$ – первое собственное число уравнения (1.10).

Однако если $|\lambda_1|$ – собственное число интегрального уравнения (1.10), то ряд (1.11) будет плохо сходиться в окрестности $|\lambda_1|$ и будет расходиться при $|\lambda| > |\lambda_1|$. В этом случае возможно использование метода аналитического продолжения. Этот метод особенно эффективен, если заранее известно расположение собственных чисел интегрального уравнения (1.10). Предположим для определенности, что $\lambda_1 = -1$. Выбор в качестве λ_1 числа -1 основан на том, что это значение является собственным числом интегрального уравнения теории потенциала. В общем случае замена $\mu = -1/\lambda_1$ приводит к собственному числу -1.

Опишем вначале метод непосредственного продолжения [92] . Решение интегрального уравнения при $|\lambda| < 1$ дается сходящимся рядом

$$x(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) + \cdots .$$

Это решение зависит от параметра λ, и его естественно записать, как $x(t,\lambda)$. Предположим, что следующее по модулю собственное число λ_2 удовлетворяет неравенству $|\lambda_2| > 2$. Пусть требуется найти решение уравнения (1.10) при $1 < \lambda \leq 2$, т.е. при тех значениях λ, при которых ряд (1.11) расходится. Представим решение $x(t,\lambda)$ рядом по степеням $\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$. Сделаем замену $\lambda = \mu + 1/2$. Тогда

$$x(t,\lambda) = x_0(t) + \left(\mu + \frac{1}{2}\right) x_1(t) + \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2 x_2(t) + \cdots =$$

$$= (x_0(t) + \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{4}x_2(t) + \cdots) + (x_1(t) + x_2(t) + \frac{3}{4}x_3(t) + \cdots)\mu +$$

$$+(x_2(t) + \frac{3}{2}x_3(t) + \cdots)\mu^2 + \cdots .$$

Этот ряд имеет радиус сходимости, равный 3/2, и, следовательно, с его помощью можно находить решение в интервале (1,2).

Второй широко применяемый метод аналитического продолжения заключается в введении дробно-линейного преобразования $\lambda = \frac{a+b\mu}{c+d\mu}$, осуществляющего преобразование множества собственных значений уравнения (1.10) с комплексной плоскости λ на комплексную плоскость μ. При этом, если заранее известно расположение собственных значений уравнения (1.10), то можно подобрать константы a, b, c, d в дробно-линейном преобразовании таким образом, чтобы ряд, составленный по степеням параметра μ, сходился в более широкой области, нежели ряд, составленный по степеням параметра λ.

Метод аналитического продолжения по параметру широко применяется при решении самых разнообразных задач математической физики [92], [102], [111].

1.4. Метод вырожденного ядра

Ядро $h(t,\tau)$ называется вырожденным, если оно имеет вид

$$h(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) b_k(\tau). \tag{1.16}$$

Для уравнения

$$Kx \equiv x(t) - \lambda \int_a^b h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \qquad (1.17)$$

с таким ядром нетрудно получить решение в замкнутой форме.

В разложении (1.16) функции $a_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$, или функции $b_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$, можно считать линейно независимыми, так как в противном случае, выделив линейно независимое подмножество, можно было бы уменьшить число слагаемых в разложении. Для определенности будем считать, что функции $a_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$, линейно независимые.

Решение уравнения (1.17) будем искать в виде суммы

$$x(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k a_k(t), \qquad (1.18)$$

где $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$ – константы, подлежащие определению.

Введем обозначения

$$f_k = \int_a^b f(t)a_k(t)dt,\ \gamma_{kl} = \int_a^b a_l(t)b_k(t)dt.$$

Подставляя выражение $x(t)$ в уравнение (1.17), получаем выражение:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k a_k(t) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} a_j(t)b_j(\tau)\right] f(\tau)d\tau -$$

$$-\lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_k a_j(t)b_j(\tau)a_k(\tau)d\tau = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях
$a_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$, приходим к системе уравнений:

$$A_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j \gamma_{ij} = \lambda f_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1.19)$$

Обозначим через $\Delta(\lambda)$ определитель системы уравнений (1.19).

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то система (1.19) однозначно разрешима, и, определив из нее неизвестные коэффициенты $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, по формуле (1.18) находим решение уравнения (1.17) с ядром (1.16).

Простота решения интегральных уравнений с вырожденным ядром делает привлекательным сведение общего интегрального уравнения (1.17) к уравнению с вырожденным ядром.

Рассмотрим уравнение (1.17) в банаховом пространстве $C[a,b]$. Пусть оператор $K \in B[C,C]$ непрерывно обратим. Пусть $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots,$ – система линейно независимых функций, такая, что функцию $h(t,\tau)$ в квадрате $[a,b]^2$ можно с любой точностью аппроксимировать суммами $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\psi_k(\tau)$. Тогда существует такое N, что при $n \geq N$

$$\|h(t,\tau) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\psi_k(\tau)\|_C \|K^{-1}\|(b-a) = q < 1.$$

По теореме Банаха об обратном операторе уравнение

$$K_N x \equiv x(t) - \lambda \sum_{k=1}^{N} \int\limits_a^b \varphi_k(t)\psi_k(\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \qquad (1.20)$$

однозначно разрешимо и справедлива оценка $\|x^* - x_N^*\| \leq C\|h(t,\tau) -$
$- \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\psi_k(\tau)\|_C$, где x^* и x_N^* – решения уравнений (1.17) и (1.20) соответственно.

Уравнение (1.20) является вырожденным, и к нему применим описанный выше алгоритм.

1.5. Метод моментов

Пусть $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots,$ – полная ортонормальная в пространстве $L_2[a,b]$ система функций.

Приближенное решение уравнения (1.10) будем искать в виде линейной комбинации

$$x_n(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t), \qquad (1.21)$$

где $a_k,\ k = 1, 2, \dots, n,$ – требующие определения коэффициенты.

Отметим, что в этом случае можно наложить на функции $h(t,\tau)$ и $f(t)$ более общие условия. Вместо того, чтобы требовать, чтобы $h(t,\tau)$ и $f(t)$ были непрерывными функциями, можно предположить, что оператор K отображает $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, т.е.

$$f(t) \in L_2[a,b], \quad \int\limits_a^b \int\limits_a^b |h(t,\tau)|^2 dt d\tau < \infty.$$

Коэффициенты a_k определяются из системы уравнений

$$(Kx_n, \varphi_l) = (f, \varphi_l),\ l = 1, 2, \dots, n. \qquad (1.22)$$

Эта система получена из следующих соображений. Пусть $\{\varphi_k\}-$ полная в $L_2[a,b]$ система. Пусть уравнение (1.10) имеет в L_2 решение $x^*(t)$. Тогда $x^*(t)$ можно разложить в ряд по функциям φ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Так как x^*- решение уравнения $Kx = f$, а система $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots$, полна в $L_2[a,b]$, то коэффициенты Фурье функции $Kx^* - f$ по системе функций $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots$, равны нулю. Так как приближенное решение ищется в виде линейной комбинации (1.21), включающей n функций $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, то естественно требовать, чтобы функция $Kx_n - f$ была ортогональна первым n функциям системы $\{\varphi_k\},\ k = 1, 2, \ldots$.

Коэффициенты Фурье $f_k = (f, \varphi_k),\ k = 1, 2, \ldots$, называются также моментами функции $f(t)$ по системе $\varphi_k,\ k = 1, 2, \ldots$. Отсюда и происходит название метода $-$ метод моментов.

2. Оптимальные по точности и сложности методы решения одномерных слабосингулярных интегральных уравнений

Продолжим начатый в предыдущем параграфе обзор приближенных методов решения интегральных уравнений.

Рассмотрим одномерное слабосингулярное интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) + \int_0^1 \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{|\tau - t|^\eta} d\tau = f(t). \tag{2.1}$$

К этому уравнению применимы, с некоторыми модификациями, методы, изложенные в предыдущем параграфе. Однако при непосредственном применении этих методов оказываются невысокими быстрота сходимости и точность.

Г. М. Вайникко, А. Педасом и П. Убо [57] было проведено исследование гладкости решений уравнений вида (2.1) и построены оптимальные по точности методы их решения.

Исследования оптимальных по точности и сложности методов решения слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма являются активно развивающимися направлениями численного анализа. Подробный обзор результатов, полученных в этом направлении, содержится в [57], [164], [167], [168]. Здесь мы остановимся только на нескольких основных результатах, полученных в этом направлении после выхода из печати книги [57].

В работе [168] исследована гладкость решений слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра

$$x(t) + \int_0^t \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{(t-\tau)^\eta} d\tau = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.2}$$

$$x(t) + \int_0^t \frac{h(t,\tau,x(\tau))}{(t-\tau)^\eta} d\tau = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

$0 \le \eta < 1$, и на неравномерных сетках построены сплайн-коллокационные методы их решения. В ряде случаев эти методы являются оптимальными по точности (по порядку) .

Различные способы построения сплайн-коллокационных методов на неравномерных сетках изучались в работах [57], [164], [167], [168].

Цикл работ С. В. Переверзева [128] – [132] посвящен прямым методам решения интегральных уравнений. Прямым методом решения операторного уравнения

$$Kx \equiv x + Hx = f, \tag{2.4}$$

заданного в банаховом пространстве B, следуя С. Л. Соболеву [143], будем называть произвольный метод M, согласно которому оператору $H \in [B, B]$ ставится в соответствие такой N - мерный оператор H_N, что уравнение

$$x_N + H_N x_N = f \tag{2.5}$$

имеет единственное решение $x_N^*(M)$. Это решение берем в качестве приближенного решения уравнения (2.4), полученного методом M. При фиксированном N множество всех прямых методов M обозначим через M_N.

Обозначим через $\Psi_1(\alpha, \beta)$ множество операторов $H \in [B, B]$, удовлетворяющих неравенствам $\|H\| \le \alpha$, $\|(I+H)^{-1}\| \le \beta$, а через $\Psi_2(\gamma)$ – множество элементов из B, удовлетворяющих неравенству $\|x\| \le \gamma$, $x \in B$.

Величина $\varepsilon_N(\Psi_1, \Psi_2, M) = \sup\limits_{x+Hx=f, H\in\Psi_1, f\in\Psi_2} \|x - x_N(M)\|_B$ является погрешностью прямого метода M на классе уравнений (Ψ_1, Ψ_2).

Величина $\varepsilon_N(\Psi_1, \Psi_2) = \inf\limits_{M \in M_N} \varepsilon_N(\Psi_1, \Psi_2, M)$ определяет точность решения уравнений класса (Ψ_1, Ψ_2) прямыми методами.

В работах [128] – [132] исследованы прямые методы решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра при различных способах задания конечномерных операторов H_N и в различных базисах.

Гладкость решений одномерных нелинейных слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра была исследована в статье [169].

Рассматривалось уравнение

$$x(t) + \int_0^t h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \quad 0 < t \le T, \tag{2.6}$$

при условиях:

1) ядро $h(t, \tau, u)$ имеет m непрерывных производных по переменным t, τ, u, $0 \le t \le T$, $0 \le \tau \le t$, $u \in R$, причем существует такое действительное число $v \in (-\infty, 1)$, что для $0 \le \tau < t \le T$, $u \in R$ и неотрицательных целых чисел i, j, k, таких, что $i + j + k \le m$, справедливы следующие неравенства:

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^k h(t, \tau, u) \right| \le$$

$$\leq b_2(|u|)\begin{cases} 1, & \text{если} \quad v+i<0, \\ 1+|\log(t-\tau)|, & \text{если} \quad v+i=0, \\ |t-\tau|^{-v-i}, & \text{если} \quad v+i>0, \end{cases} \tag{2.7}$$

и

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^k h(t,\tau,u_1)- \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^k h(t,\tau,u_2)\right| \leq$$

$$\leq b_2 \max(|u_1|,|u_2|)|u_1-u_2|\begin{cases} 1, & \text{если} \quad v+i<0, \\ 1+|\log|(t-\tau)||, & \text{если} \quad v+i=0, \\ |t-\tau|^{-v-i}, & \text{если} \quad v+i>0, \end{cases} \tag{2.8}$$

где функции b_1 и b_2 – монотонно возрастающие;

2) функция $f(t) \in C^{m,v}([0,T])$, т.е. она имеет непрерывные производные на сегменте $[0,T]$ и удовлетворяет неравенствам

$$|f^{(k)}(t)| \leq A\begin{cases} 1, & \text{если} \quad k<1-v, \\ 1+|\log|t||, & \text{если} \quad k=1-v, \\ t^{1-v-k}, & \text{если} \quad k>1-v, \end{cases}$$

где $k=0,1,\ldots,m$;

3) интегральное уравнение (2.6) имеет решение $u_0 \in L_\infty(0,T)$.

В [169] показано, что если выполнены условия (1), (2), (3), то решение уравнения (2.6) $x^*(t) \in C^{m,v}(0,T]$.

Гладкость решений нелинейных интегральных уравнений Фредгольма

$$x(t)+\int_0^{2T} h(t,\tau,x(\tau))d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2T, \tag{2.9}$$

исследовалась в [169] при следующих условиях:

1) ядро $h(t,\tau,u)$ имеет m непрерывных производных при t, $\tau \in [0,2T]$, $t \neq \tau$, $u \in R$, и существует действительное число $v \in (-\infty,1)$, такое, что для неотрицательных целых чисел i,j,k при $i+j+k \leq m$ выполняются неравенства (2.7), (2.8);

2) $f \in C^{m,v}(0,2T)$, т.е. функция $f(t)$ имеет m непрерывных производных при $0<t<2T$, удовлетворяющих неравенствам

$$|f^{(k)}(t)| \leq A\begin{cases} 1, & \text{если} \quad k<1-v, \\ 1+|\log(\rho(t))|, & \text{если} \quad k=1-v, \\ \rho(t)^{1-v-k}, & \text{если} \quad k>1-v, \end{cases}$$

где $\rho(t)= \min(t,2T-t)$.

В [169] доказано, что если уравнение (2.9) имеет решение $x^* \in$ $\in L_\infty(0, 2T)$, то $u^*(t) \in C^{m,v}(0, 2T)$.

В работе [169] предложены и обоснованы сплайн-коллокационные методы решения уравнений (2.6) и (2.9) .

Опишем этот метод для уравнения (2.9). Сегмент $[0, 2T]$ разбивается на $2N$ сегментов $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, узлами $t_k = \left(\frac{k}{N}\right)^v T$, $k = 0, 1, \dots, N$, $t_k = 2T - \left(\frac{2N-(k+1)}{N}\right)^v T$, $k = N+1, \dots, 2N$, $v \geq 1$.

В каждом сегменте Δ_k, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, выбирается m узлов ξ_l^k, $l = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, по которым строится интерполяционный полином $x_m(t, \Delta_k)$ с неизвестными значениями $x_m(\xi_l^k)$, $l = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$. Локальный сплайн, составленный из полиномов $x_m(t, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, обозначается через $x_m(t)$.

Метод коллокации для уравнения (2.9) имеет вид

$$\left[x_m(t) + \int_0^{2T} h(t, \tau, x_m(\tau)) d\tau - f(t) \right]_{t=\xi_l^k} = 0, \qquad (2.10)$$

$l = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$.

Исследована сходимость метода (2.10) при различных значениях параметра v. Определены значения параметра v, при которых метод является оптимальным по порядку по точности и имеет погрешность порядка N^{-m}.

Аналогичные результаты получены в [169] для слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра.

Вопросы сложности решений интегральных уравнений Фредгольма исследуются с 1967г., когда была опубликована работа [80], в которой построен оптимальный по порядку (по сложности) итерационно-проекционный метод решения интегрального уравнения

$$Kx \equiv x(t) + \int_0^1 h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t) \qquad (2.11)$$

на классе функций $W^r(1)$.

В качестве информационного оператора $T(h, f)$ при решении этого уравнения были взяты значения функции $h(t, \tau)$ в N_1 узлах и значения функции $f(t)$ в N_2 узлах, $N_1 + N_2 = N$. Пусть F_0 означает множество способов задания информации, при которых каждому интегральному уравнению (2.11) ставится в соответствие числовой вектор $T(h, f) =$

$= \quad (h(t_1,\tau_1),\dots,h(t_{N_1},\tau_{N_1}),f(t_{N_1+1}),\dots,f(t_N)),$ где $(t_k,\tau_k),k = 1,\dots,N_1$ и $t_k, k=N_1+1,\dots,N,$ некоторые точки из $[0,1]^2$ и $[0,1]$, фиксированные для каждого метода T из F_0. Было показано, что

$$E_N(W^r(1),C,F_0) \asymp N^{-r/2} \tag{2.12}$$

и

$$\mathrm{comp}_c(W^r(1),F_0,\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-2/r}. \tag{2.13}$$

В работе [128] было отмечено, что из результатов статьи [80] непосредственно следуют оценки $E_N(W^r(1),L_2,F_0) \geq CN^{-r/2}$, $\mathrm{comp}_c(W^r(1),F_0,\varepsilon) \asymp \varepsilon^{-2/r}$.

В этой же работе [128] было отмечено, что при другом способе задания информационного оператора оценка сложности решения интегрального уравнения Фредгольма может быть значительно усилена. Как и в [128], изложим эти результаты на примере интегрального уравнения

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \tag{2.14}$$

с периодическими, с периодом 2π, функциями $h(t,\tau)$ и $f(t)$.

В [128] получена оценка

$$\inf_{F\subset F_u} E_N(\Psi,X,F) \geq cN^{-r}, \tag{2.15}$$

где $X=C,L_2, \quad \Psi=\tilde{W}^r(1), c-$ константа, не зависящая от N.

Изложим несколько способов решения интегральных уравнений Фредгольма, имеющих меньшую сложность, нежели (2.12).

Обозначим через V_m и S_m действующие в пространстве тригонометрических полиномов операторы Валле-Пуссена и Фурье, определенные соотношением

$$V_m f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\cos k(t-\tau) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=m+1}^{2m-1}\left(1-\frac{k-m}{m}\right)\cos k(t-\tau)\right] f(\tau)d\tau,$$

$$S_m f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1}\cos k(t-\tau)\right] f(\tau)d\tau.$$

Если $f\in W^r(1)$, то в пространствах $X=C,L_2$ для оператора V_m справедливы оценки $\|f-V_m f\|_X \leq Am^{-r}\|f^{(r)}\|, \quad \|V_m\|_X \leq A.$

Для оператора S_m справедливы оценки $\|f-S_mf\|_C \leq Am^{-r}\ln m$, $\|S_m\|_C \leq A\ln m$, $\|f-S_mf\|_{L_2} \leq Am^{-r}, \quad \|S_m\| \leq A$.

В качестве приближенного решения уравнения (2.14) возьмем точное решение вырожденного уравнения

$$x(t) + V^t_{n^2}\int\limits_0^{2\pi} S^\tau_n[h(t,\tau)]x(\tau)d\tau = V_N f, \quad N \asymp n^3,$$

где верхние индексы t и τ означают переменные, по которым берутся операторы.

Этот метод приводит к оценкам $E_N(\tilde{W}^r(1), C, F^{\text{ conv}}) \asymp N^{-2r/3}$, $\text{comp}_C(\tilde{W}^r(1), F^{conv}, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-3/2r}$, где $F^{\text{ conv}}$ - множество способов задания информации $T_\Omega(H,f)$, отвечающих всевозможным выпуклым множествам Ω, внутренность которых не пуста.

В [128] отмечается, что если в качестве оператора $F \subset F^{\text{ conv}}$ использовать двумерные коэффициенты Фурье с номерами из гиперболических крестов, то можно получить оценку (2.15).

Там же исследована сложность решения уравнения (2.14) при задании коэффициентов Фурье функции $h(t,\tau)$ с номерами из гиперболических крестов.

При решении уравнения (2.14) использовался способ задания информации T_m, определяемый набором функционалов

$$T_m(H,f) = \Bigg(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(t,\tau)\cos(kt - \frac{\pi i}{2})\cos(n\tau - \frac{\pi j}{2})dtd\tau,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(lt - \frac{\pi i}{2})dt, \quad i,j = 0,1; \quad k,n,l = 0,1,\dots,m, \quad kn \leq m\Bigg).$$

В набор T_m входят коэффициенты Фурье ядер $h(t,\tau)$ с номерами из гиперболического креста $\Gamma_m = \{(t,\tau) : |t\tau| \leq m, \quad |t| \leq m, \quad |\tau| \leq m\}$.

В [128] показано, что при использовании информационного оператора T_m справедлива оценка $\text{comp}_{L_2}(W^r_{L_2}(1), \varepsilon) \leq C\varepsilon^{-1/r}\log(1/\varepsilon)$.

Там же получена оценка снизу $\text{comp}_{L_2}(W^r_{L_2}(1), \varepsilon) \geq C\varepsilon^{-1/r}$.

Исследование сложности решения уравнения (2.14) при задании информации об уравнении в виде коэффициентов Фурье функции $h(t,\tau)$ с номерами из ступенчатого гиперболического креста проведено в [132].

Отметим, что оптимальность методов восстановления функций с доминирующей старшей производной отрезками ряда Фурье с

номерами коэффициентов из гиперболических крестов была отмечена
К.И. Бабенко [4].

Подробное изложение методов восстановления функций многих переменных отрезками рядов Фурье с номерами коэффициентов Фурье, принадлежащими гиперболическим крестам, содержится в монографии В.Н. Темлякова [148].

В работе С.В. Переверзева и С.Г. Солодкого [187] исследованы адаптивные прямые методы решения интегральных уравнений вида

$$Kx \equiv x(t) + Hx = f, \; Hx = \int\limits_0^1 \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{|\tau - t|^\eta} d\tau, \quad 0 \le \eta < 1. \qquad (2.16)$$

Пусть $\beta = 1-\eta$, H_β– класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем β $(0 < \beta < 1)$ и с нормой

$$\|x\|_\beta = \max_t |x(t)| + \sup_{t_1 \ne t_2} |x(t_1) - x(t_2)|/|t_1 - t_2|^\beta, \quad (t, t_1, t_2 \in [0,1]).$$

Через $H^\beta = H^\beta(M)$ обозначим множество операторов вида Hx, отображающих C в H_β и удовлетворяющих неравенствам

$$\|H\|_{C \to H_\beta} \le M_1, \quad \|(I+H)^{-1}\|_{C \to C} \le M_2.$$

Через Ψ_β обозначен класс однозначно разрешимых уравнений вида (2.16), у которых $\|f\|_\beta \le 1$.

Приближенное решение уравнения (2.16) ищется по методу Ритца в виде линейной комбинации

$$x_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k + f, \qquad (2.17)$$

где φ_k – базисные элементы.

Если базисные элементы не зависят от вида оператора H, то метод приближенного решения уравнения (2.16) является неадаптивным. Если базисные элементы $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, зависят от вида конкретного оператора H, то метод называется адаптивным.

В [187] даны определения оптимальных по точности адаптивных методов и предложен метод, являющийся оптимальным по порядку (по точности) методом решения интегральных уравнений на классе Ψ_β.

Этот метод заключается в следующем. Пусть $l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, базис подпространства пространства $X = C$, и пусть

$$\varphi_k = \begin{cases} l_k, & k = 1, 2, \ldots, n, \\ Hl_{k-n}, & k = n+1, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Обозначим через P_n оператор, проектирующий пространство X на линейную оболочку $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Приближенное решение уравнения (2.16) определяется как точное решение уравнения

$$x_{2n} - (P_n H x_{2n} + H P_n x_{2n} - P_n H P_n x_{2n}) = f. \qquad (2.18)$$

На классе уравнений Ψ_β получена оценка $\|x^* - x^*_{2n}\| \leq An^{-(2-\eta)^\beta}$, где x^* и x^*_{2n} – решения уравнений (2.16) и (2.18), соответственно.

Отметим, что оптимальные неадаптивные методы решения интегрального уравнения (2.16) имеют погрешность $O(n^{-(1-\eta)})$.

3. Оптимальные по точности методы решения интегральных уравнений Фредгольма

В этом параграфе построено несколько оптимальных по порядку (по точности) алгоритмов приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма на классах функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ и $B_{r\gamma}(\Omega)$. При изложении этого параграфа автор следовал своей работе [35].

3.1. Одномерные уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \qquad (3.1)$$

Вначале будем предполагать, что $f(t) \in B_{r,\gamma}([-1,1])$, а функция $h(t,\tau)$ принадлежит классу функций $B_{r,\gamma}([-1,1])$ по переменной t при произвольном фиксированном значении τ и по переменной τ при произвольно фиксированном значении t. Перечисленные предположения будем называть условиями A.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ и $\Delta^*_k = [\tau_{k+1}, \tau_k]$ точками $t_0 = -1, t_k = -1 + (e^{k-1}/e^N)^v, \tau_k =$ $= 1-(e^{k-1}/e^N)^v, k = 1, 2, \ldots, N+1, \tau_0 = 1$, причем $v = 1/w, w = 2Ae$ при $2Ae > 1$ и $v = \ln 2$ при $2Ae \leq 1$.

Опишем построение интерполяционных полиномов. В каждом сегменте Δ_k (аналогично Δ^*_k) функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $P_u(f, \Delta_k)$ (аналогично $P_u(f, \Delta^*_k)$) , который строится следующим образом. Параметр $u = r$ при $k = 0$ и

$u = s$ при $1 \le k \le N$. Здесь $s = [(r+1-\gamma)N/(2Ae)]+1$ при $w > 1$ и $s = [(r+1-\gamma)N/(1+\log_2 e)]+1$ при $w \le 1$. Обозначим через $\zeta_1, \ldots, \zeta_u$ узлы полинома Лежандра степени u, расположенные в сегменте $[-1, 1]$. При отображении сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $\Delta_k \, (\Delta_k^*)$ узлы $\zeta_1, \ldots, \zeta_u$ отображаются в узлы $\overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_u \, (\overline{\zeta}_1^*, \ldots, \overline{\zeta}_u^*)$. Интерполяционный полином, построенный по узлам $\overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_u \, (\overline{\zeta}_1^*, \ldots, \overline{\zeta}_u^*)$, обозначается через $P_u(f, \Delta_k) \, (P_u(f, \Delta_k^*))$. Локальный сплайн , состоящий из полиномов $P_u(f, \Delta_k)$ и $P_u(f, \Delta_k^*)$, обозначается $f_N(t)$.

Приближенное решение уравнения (3.1) ищем в виде сплайна $x_N(t)$, который состоит из интерполяционных полиномов $P_r(x, \Delta_0), P_s(x, \Delta_k), \; P_s(x, \Delta_k^*), k = 1, \ldots, N, P_r(x, \Delta_0^*)$ с неопределенными пока значениями $\{x_{i,k}^j\}, j = 1, 2$, в узлах интерполяции, т. е. $P_s(x, \Delta_k) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_{i,k}^1 \psi_{i,k}^1(t) \; (P_s(x, \Delta_k^*) = \sum\limits_{i=1}^{s} x_{i,k}^2 \psi_{i,k}^2(t))$, где $\psi_{i,k}^1(t) \, (\psi_{i,k}^2(t))$ – фундаментальный полином, отвечающий точке $\overline{\zeta}_i \in \Delta_k \, (\overline{\zeta}_i^* \in \Delta_k^*)$.

В обозначениях $\psi_{ik}^j, j = 1, 2$, верхний индекс j означает, что фундаментальный полином построен для узла $\overline{\zeta}_i$, расположенного в сегменте Δ_k при $j = 1$, или для узла $\overline{\zeta}_i^*$, расположенного в сегменте Δ_k^* при $j = 2$.

Обозначим через L_N оператор, ставящий в соответствие функции $g(t), t \in [-1, 1]$, локальный сплайн $g_N(t)$.

Неизвестные коэффициенты $x_{i,k}^j$ сплайна $x_N(t)$ определяются по методу механических квадратур, который в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N \equiv x_N(t) + L_N^t \left[\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau [h(t,\tau) x_N(\tau)] d\tau \right] = L_N f(t). \qquad (3.2)$$

Обоснование метода механических квадратур (3.2) будем проводить в пространстве $X = C[-1, 1]$ и его подпространстве X_N, состоящем из локальных сплайнов $x_N(t)$.

Теорема 3.1. Пусть оператор $K \in [C, C]$ непрерывно обратим и выполнены условия А. Тогда при N таких, что $q < 1$, система уравнений (3.2) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и справедливы оценки : $\| x_N - x_N^* \| \le Ae^{-\sqrt{n(r+1-\gamma)/(2eA)}} \sqrt{n}$ при $w > 1$; $\| x_N - x_N^* \| \le$ $\le Ae^{-\sqrt{n(r+1-\gamma)} \ln 2} \sqrt{n}$ при $w \le 1$. Здесь n - число неизвестных x_{ik}^j, $q = Ae^{-\sqrt{n(r+1-\gamma)/(2eA)}} \sqrt{n}$ при $w > 1$; $q = Ae^{-\sqrt{n(r+1-\gamma)} \; \ln 2} \sqrt{n}$ при $w \le 1$.

Доказательство. Пусть $f \in B_{r,\gamma}(\Omega)$. Оценим погрешность аппроксимации функции $f(t)$ сплайном $f_N(t)$. Для этого воспользуемся известной оценкой погрешности аппроксимации функций интерполяционными полиномами $\| f(t) - P_N(t) \|_C \leq AE_N\lambda_N$, на сегменте $[-1,1]$, где E_N – наилучшее приближение функции $f(t)$ полиномом степени N, λ_N – константа Лебега.

Известно [126], что на классе $W^r(1) \quad E_N \leq AN^{-r}$ и что для полиномов Лежандра $\lambda_N \leq AN$. Следовательно, на классе $W^r(1)$ $\| f(t) - P_N(t) \|_C \leq AN^{-r+1}$. При переходе от сегмента $[-1,1]$ к сегменту $[a,b]$ имеем $\| f(t) - P_N(t) \|_C \leq AN^{-r+1}(b-a)^r$.

Приступим теперь к оценке погрешности аппроксимации функции $f(t)$ локальным сплайном $f_N(t)$.

Вначале рассмотрим случай $w > 1$.

На сегменте Δ_0 имеем оценку $\| f(t) - f_N(t) \|_C \leq CA^r/e^{N(r+1-\gamma)v} \leq$ $\leq Ce^{-(r+1-\gamma)N/(2Ae)}$.

На сегменте Δ_k получаем

$$\| f(t) - f_N(t) \|_C \leq CA^s h_k^s (e^N/e^{k-1})^{(s-r)v} s =$$

$$= CA^s ((e^{kv} - e^{(k-1)v})/e^{Nv})^s (e^N/e^{k-1})^{(s-r-1+\gamma)v} s \leq$$

$$\leq CA^s (e^v - 1)^s s \leq CA^s (2/w)^s s \leq Ce^{-s} s \leq CNe^{-(r+1-\gamma)N/(2eA)}.$$

Таким образом, при $w > 1$ $\| f(t) - f_N(t) \|_C \leq CNe^{-(r+1-\gamma)N/(2Ae)}$.

Общее число функционалов, используемых при построении сплайна $f_N(t)$ в этом случае, равно $n = 2N([(r+1-\gamma)N/(2Ae)] + 1) + 2(r+1)$. Отсюда $N = (1+o(1))\sqrt{Aen/(r+1-\gamma)}$.

Следовательно, $\| f(t) - f_N(t) \| \leq C\sqrt{n}e^{-\sqrt{(r+1-\gamma)n/(2Ae)}}$.

Рассмотрим теперь случай $w \leq 1$. На сегменте Δ_0 имеем $\| f(t) - f_N(t) \| \leq CA^{(r+1-\gamma)}/e^{N(r+1-\gamma)v} \leq Ce^{-(r+1-\gamma)N\ln 2} \leq$ $C2^{-(r+1-\gamma)N}$, а на сегменте Δ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$,

$$\| f(t) - f_N(t) \| \leq CA^s h_k^s (e^N/e^{k-1})^{(s-r-1+\gamma)v} s \leq$$

$$\leq CA^s (e^v - 1)^s s \leq CA^s s \leq C(2e)^{-s} s \leq CN2^{-(r+1-\gamma)N}.$$

Общее число функционалов, используемых при построении сплайна $f_N(t)$ в этом случае, равно $n = 2N([(r+1-\gamma)N/(1+\log_2 e)] + 1) +$
$+2(r+1) = (1+o(1))(2(r+1-\gamma)N^2/(1+\log_2 e))$.

Отсюда $N = \sqrt{(1+\log_2 e)n/(2(r+1-\gamma))}$. Следовательно, погрешность аппроксимации при $w \leq 1$ оценивается неравенством

$$\| f(t) - f_N(t) \| \leq CN2^{-(r+1-\gamma)N} \leq CNe^{-(r+1-\gamma)N\ln 2} \leq$$

$$\leq C\sqrt{n}e^{-\sqrt{(1+\log_2 e)(r+1-\gamma)n/2}\ \ln 2}.$$

Оценки на сегменте Δ_k^* проводятся аналогично.

Метод коллокации для уравнения (3.1) в операторной форме имеет вид

$$\overline{K}_N x_N \equiv x_N(t) + L_N\left[\int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x_N(\tau)d\tau\right] = L_N[f(t)].$$

Воспользовавшись оценками точности аппроксимации локальными сплайнами, получаем:

$$\| K_N - \overline{K}_N \|_X \leq C\sqrt{n}e^{-\zeta}, \tag{3.3}$$

где

$$\zeta = \begin{cases} \sqrt{(r+1-\gamma)n/2Ae}, & \text{если} \quad w > 1, \\ \sqrt{(1+\log_2 e)(r+1-\gamma)n/2}\ \ln 2, & \text{если} \quad w \leq 1. \end{cases}$$

Так как квадратурная формула, построенная при весе 1 по узлам полинома Лежандра, является квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности, то

$$L_N\left[\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)x(\tau)]d\tau\right] = L_N\left[\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)]x(\tau)d\tau\right].$$

Отсюда с учетом полученных выше оценок точности аппроксимации локальными сплайнами имеем

$$\| K_N x_N - \overline{K}_N x_N \|_{X_N} \leq A\sqrt{n}e^{-\zeta} \| x_N \| . \tag{3.4}$$

Из неравенств (3.3), (3.4) и общей теории приближенных методов следует справедливость теоремы.

Исследуем приближенные методы решения уравнения (3.1) в предположении, что $f(t) \in Q_{r,\gamma}([-1,1], M)$, а функция $h(t,\tau)$ принадлежит классу функций $Q_{r,\gamma}([-1,1], M)$ по переменной t при произвольном фиксированном значении τ и по переменной τ при фиксированном значении t. Перечисленные предположения будем называть условиями B.

Разобьем сегмент $[-1,1]$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$ и $\Delta_k^* = [\tau_{k+1}, \tau_k]$ точками $t_k = -1 + (k/N)^v$ и $\tau_k = 1 - (k/N)^v, k = 0, 1, \ldots, N$, где $v = s/(s-\gamma)$.

Для аппроксимации функции $f(t)$ на сегменте $[-1,1]$ строится локальный сплайн $f_N(t)$ по описанному выше алгоритму. Единственное отличие в том, что в каждом сегменте $\Delta_k(\Delta_k^*), k =$

$0, 1, \ldots, N-1$, сплайн $f_N(t)$ представляет собой интерполяционный полином степени $s-1$, построенный по s узлам полинома Лежандра степени s, отображенным с сегмента $[-1,1]$ на сегмент $\Delta_k(\Delta_k^*)$.

Приближенное решение уравнения (3.1) ищем в виде сплайна $x_N(t)$, который состоит из интерполяционных полиномов $P_s(x,\Delta_k), P_s(x,\Delta_k^*)$,
$k = 0, 1, \ldots, N-1$, с неопределенными пока значениями $x_{i,k}^j$ в узлах интерполяции.

Обозначим через L_N оператор, ставящий в соответствие функции $g(t), t \in [-1,1]$, локальный сплайн $g_N(t)$.

Неизвестные коэффициенты $x_{i,k}^j$ сплайна $x_N(t)$ определяются по методу механических квадратур, который в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N \equiv x_N(t) + L_N^t \left[\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau [h(t,\tau) x_N(\tau)] d\tau \right] = L_N f(t). \qquad (3.5)$$

Теорема 3.2. Пусть оператор $K \in B[C,C]$ непрерывно обратим и выполнены условия B. Тогда при N таких, что $q = AN^{-s} < 1$, система уравнений (3.5) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и справедлива оценка

$$\| x_N - x_N^* \| \leq AN^{-s}. \qquad (3.6)$$

Доказательство. В гл. I было показано, что погрешность аппроксимации функции $g(t) \in Q_{r,\gamma}([-1,1],M)$ сплайном $g_N(t)$ оценивается неравенством $\| g(t) - g_N(t) \| \leq AN^{-s}$.

Используя эти неравенства и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.1, убеждаемся в справедливости теоремы 3.2.

Замечание. Метод механических квадратур (3.5) является оптимальным по порядку по точности на классе $Q_{r,\gamma}([-1,1],M)$ среди всех методов, использующих для своего построения $O(N^2)$ функционалов вида $h(w_k)$ и $O(N)$ функционалов вида $f(t_k)$, где w_k – произвольная точка в квадрате $[-1,1]^2$, а t_k – произвольная точка на сегменте $[-1,1]$.

Для доказательства этого замечания достаточно рассмотреть уравнение

$$x(t) + \int\limits_{-1}^{1} h(\tau) x(\tau) d\tau = f(t),$$

где $f(t) \in Q_{r,\gamma}([-1,1],M)$, решение которого имеет вид $x^*(t) = f(t) +$
$+C$. Значит, $x^* \in Q_{r,\gamma}([-1,1],M)$. В гл. I получена оценка снизу для поперечников Бабенко $\delta_N(Q_{r,\gamma}([-1,1],M)) \geq AN^{-s}$. Из этого неравенства вытекает неулучшаемость оценки (3.6) и, следовательно, оптимальность метода при использовании $O(N)$ функционалов вида $f(t_k)$.

Покажем, что эта оценка остается неизменной и в случае, когда используется N^2 значений функции $h(t,\tau)$, удовлетворяющей условию B.

Для этого рассмотрим два уравнения

$$x_1(t) + \alpha \int_{-1}^{1} x_1(\tau)d\tau = \beta$$

и

$$x_2(t) + \int_{-1}^{1} (\alpha + h(t,\tau))x_2(\tau)d\tau = \beta,$$

где $h(t,\tau)-$ неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям B и обращающаяся в нуль в N^2 узлах, расположенных в области $[-1,1]$.

Ниже, в § 6 будет показано, что для решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ приведенных выше уравнений справедливо неравенство

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_C \geq \frac{\beta}{1-2\alpha} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} h(t,\tau)dtd\tau \geq AN^{-s}.$$

Отсюда следуют неулучшаемость оценки (3.6) и оптимальность метода при использовании $O(N^2)$ функционалов вида $h(w_k)$.

Из полученных оценок снизу следует оптимальность по порядку метода механических квадратур.

3.2. Многомерные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv x(t_1,\ldots,t_l)+\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1} h(t_1,\ldots,t_l,\tau_1,\ldots,\tau_l)x(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\ldots d\tau_l =$$
$$= f(t_l,\ldots,t_l), \quad l = 2,3,\ldots. \tag{3.7}$$

Вначале предполагаем, что функция $f(t_l,\ldots,t_l) \in B_{r,\gamma}(\Omega)$, $\Omega =$ $= [-1,1]^l$, а функция $h(t_1,\ldots,t_l,\tau_1,\ldots,\tau_l)$ принадлежит классу

$B_{r,\gamma}(\Omega)$ по переменной $t = (t_l, \ldots, t_l)$ при произвольно фиксированном значении $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$ и по переменной τ при произвольно фиксированном значении t. При этом предположении будем говорить, что выполнено условие A.

Для построения и обоснования приближенных методов решения уравнения (3.7) при условиях A необходимо предварительно исследовать точность аппроксимации функции $g(t_l, \ldots, t_l) \in B_{r,\gamma}(\Omega)$ локальными сплайнами. Эти вопросы были исследованы в первой главе. Для удобства воспроизведем здесь элементы выкладок, проведенных в первой главе.

Обозначим через $\Delta_k, k = 1, \ldots, N$, множество точек $t = (t_l, \ldots, t_l)$ из области Ω, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенствам $(e^{k-1}/e^N)^v \leq \rho(t, \Gamma) \leq (e^k/e^N)^v$, где $v =$
$= 1/w, w = 2Ae$ при $2Ae > 1$ и $v = \ln 2$ при $2Ae \leq 1$, а через Δ_0- множество точек $t \in \Omega$, таких, что $0 \leq \rho(t, \Gamma) \leq e^{-Nv}$.

Каждую область Δ_k покроем кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, грани которых параллельны осям координат, а ребра равны $h_k = e^{(k-N)v} - e^{(k-1-N)v}$ при $k = 1, 2, \ldots, N$ и $h_0 = e^{-Nv}$ при $k = 0$.

При этом в каждой области Δ_k среди кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ может оказаться 2^l параллелепипедов.

Общее число n элементов покрытия $n = Ce^{Nv(l-1)}$, $C =$ const.

Пусть $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [a^k_{i_1}, a^k_{i_1+1}; \ldots; a^k_{i_l}, a^k_{i_l+1}]$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $g(t_1, \ldots, t_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом
$g_N(t_1, \ldots, t_l, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) = P_{u,\ldots,u} g(t_1, \ldots, t_l)$. Здесь $P_{u,\ldots,u} = P^{t_1}_u \ldots P^{t_l}_u$, а через $P^{t_i}_u$ обозначен интерполяционный полином P_u, построенный при доказательстве теоремы 3.1 и действующий по переменной $t_i, i =$
$= 1, 2, \ldots, l$. Положим $u = s$ при $k = 1, 2, \ldots, N$ и $u = r$ при $k = 0$. Кроме того, положим $s = [(r+1-\gamma)N/(2Ae)] + 1$ при $w = 2Ae > 1$ и $s = [(r+1-\gamma)N/(1+\log_2 e)] + 1$ при $w \leq 1$.

Локальный сплайн, определенный в Ω и состоящий из полиномов $g_N(t_1, \ldots, t_l; \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, будем обозначать $g_N(t_1, \ldots, t_l)$. Множество локальных сплайнов, построенных описанным выше способом, обозначим через LS_N.

В гл. 1 было показано, что

$$\| g(t) - g_N(t) \| \leq n_1^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}, \tag{3.8}$$

где n_1- общее число функционалов, используемых при построении сплайна $g_N(t)$.

Приближенное решение уравнения (3.7) будем искать в виде локального сплайна $x_N(t_1,\dots,t_l) \in LS_N$ с неопределенными пока значениями в узлах интерполяции. Эти значения определяются по методу механических квадратур из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N \equiv x_N(t) + L_N\left[\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1} L_N^{\tau}[h(t,\tau)x_N(\tau)]d\tau\right] = L_N[f(t)], \quad (3.9)$$

где через L_N обозначен оператор проектирования на множество сплайнов из LS_N; верхний индекс τ в операторе проектирования L_N^{τ} означает, что проектирование проводится по переменной τ.

Из полученной выше оценки (3.8) погрешности аппроксимации локальными сплайнами и из общей теории приближенных методов вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть оператор $K \in [C,C]$ непрерывно обратим и выполнены условия А. Тогда при N таких, что $q = Cn_1^{-(r+1-\gamma)/(l-1)} <$
< 1, система уравнений (3.9) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и справедлива оценка $\| x_N^* - x^* \| \leq Cn_1^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}$, где x^*- решение уравнения (3.7).

Будем говорить, что выполнены условия B, если функция $f(t) \in$ $\in Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, а функция $h(t,\tau) \in Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ по переменной t при произвольно фиксированном значении τ и по переменной τ при произвольно фиксированном значении t.

Для построения и обоснования приближенных методов решения уравнения (3.7) при условиях B необходимо предварительно исследовать точность аппроксимации функции $g(t_1,\dots,t_l) \in Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ локальными сплайнами. Повторим для удобства читателя фрагменты рассуждений, проведенных в главе 1.

Обозначим через $\Delta_k, k = 0,1,\dots,N-1$, множество точек $t \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ области Ω удовлетворяет неравенству $(k/N)^v \leq \rho(t,\Gamma) \leq ((k+1)/N)^v$, где $v = s/(s-\gamma)$. В каждой области Δ_k разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, стороны которых равны $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v$. Общее число кубов, которое можно разместить в области Ω, равно

$$n \asymp n(v) \equiv \begin{cases} N^{v(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ N^l, & v < l/(l-1), \\ N^l \ln N, & v = l/(l-1). \end{cases} \quad (3.10)$$

В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ интерполяция осуществляется по формуле $g_N(t_1,\dots,t_l;\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}) = P_{s,\dots,s}g(t_1,\dots,t_l)$.

Сплайн, составленный из полиномов $g_N(t_1,\ldots,t_l;\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, обозначим через $g_N(t)$. Множество сплайнов, построенных указанным способом, обозначим через LS^*_N. В гл. I показано, что $\| g(t)-g_N(t) \|\asymp$
$\asymp \tilde{n}(n_1)$, где обозначено

$$\tilde{n}(n_1)\equiv\begin{cases} n_1^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v>l/(l-1),\\ n_1^{-s/l}, & v<l/(l-1),\\ n_1^{-s/l}(\ln n_1)^{s/l}, & v=l/(l-1). \end{cases} \qquad (3.11)$$

Здесь через n_1 обозначено число функционалов, используемых при построении сплайна $g_N(t)$.

Приближенное решение уравнения (3.7) будем искать в виде локального сплайна $x_N(t_1,\ldots,t_l)\in LS^*_N$ с неопределенными пока значениями в узлах интерполяции. Эти значения находятся по методу механических квадратур из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N\equiv x_N(t)+L^*_N\left[\int\limits_{-1}^{1}\ldots\int\limits_{-1}^{1}L^{*\tau}_N[h(t,\tau)x_N(\tau)]d\tau\right]=L^*_N[f(t)], \qquad (3.12)$$

где через L^*_N обозначен оператор проектирования на множество сплайнов из LS^*_N.

Используя приведенные выше оценки аппроксимации локальными сплайнами функций из класса $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ и общую теорию приближенных методов, доказываем следующее утверждение.

Теорема 3.4. Пусть оператор $K\in[C,C]$ непрерывно обратим и выполнены условия B. Тогда при N таких, что $q=A\tilde{n}(n_1)<1$, система уравнений (3.12) имеет единственное решение $x^*_N(t)$ и справедлива оценка

$$\| x^*_N-x^* \|\leq C\tilde{n}(n_1), \qquad (3.13)$$

где x^* – решение уравнения (3.7), $\tilde{n}(n_1)$ определяется формулой (3.11), в которой n_1 – число узлов в сплайне $x_N(t)$.

Замечание. Метод механических квадратур (3.12) является оптимальным по порядку (по точности) на классе функций $Q_{r,\gamma}(\Omega,M)$ среди всевозможных алгоритмов, использующих n_1^2 значений функции $h(t,\tau)$ и n_1 значений функции $f(t)$.

Замечание доказывается так же, как соответствующее замечание в одномерном случае.

4. Оптимальные по точности методы решения многомерных слабосингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_D h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in D, \qquad (4.1)$$

где D – внутренняя область параллелепипеда $\overline{D} = [-1,1]^l, l \geq 2$, $t = (t_1, \ldots, t_l), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$, где $\alpha_i, \beta_i \geq 0, | \alpha | = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l, D_t^\alpha = (\partial/\partial t_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\partial/\partial t_l)^{\alpha_l}$, $D_{t+\tau}^\beta = (\partial/\partial t_1 + \partial/\partial \tau_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (\partial/\partial t_l + \partial/\partial \tau_l)^{\beta_l}$.

На ядро $h(t,\tau)$ налагаются следующие условия [56]: оно имеет на множестве $(D \times D) \setminus \{t = \tau\}$ непрерывные производные $D_t^\alpha D_\tau^\beta h(t,\tau)$ $(| \alpha | + | \beta |) \leq m)$ до порядка $m \quad (m \geq 1)$ и существует вещественное
число v, такое, что для функции $h^*(t,\tau) = | D_t^\alpha D_{t+\tau}^\beta h(t,\tau) |$
$(| \alpha | + | \beta | \leq m)$ выполняется неравенство

$$h^*(t,\tau) \leq C \begin{cases} 1 + | t - \tau |^{-v-|\alpha|}, & v + | \alpha | \neq 0, \\ 1 + | \log | t - \tau ||, & v + | \alpha | = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

В работе [56] введено пространство $C^{m,v}(D)$ функций $x(t), t \in D$, которые имеют в D непрерывные производные до порядка m и для которых конечна норма

$$\| x \|_{m,v} = $$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{t \in D} | D^\alpha x(t) |, & m < l - v; \\ \sum\limits_{0 \leq |\alpha| < l-v} \sup_{x \in D} | D^\alpha x(t) | + \sum\limits_{|\alpha| = l-v} \sup_{t \in D} \frac{|D^\alpha x(t)|}{1 + |\ln \rho(t)|}, & m = l - v; \\ \sum\limits_{0 \leq |\alpha| < l-v} \sup_{t \in D} | D^\alpha x(t) | + \sum\limits_{|\alpha| = l-v} \sup_{t \in D} \frac{|D^\alpha x(t)|}{1 + |\ln \rho(t)|} + & \\ \quad + \sum\limits_{l-v < |\alpha| \leq m} \sup_{t \in D} d(t)^{|\alpha| - (l-v)} | D^\alpha x(t) |, & m > l - v, \\ \text{при} & v - \text{ целом}; \\ \sum\limits_{0 \leq \alpha < l-v} \sup_{t \in D} | D^\alpha x(t) | + & \\ \quad + \sup_{l-v < |\alpha| \leq m} \sup_{t \in D} \rho(t)^{|\alpha| - (l-v)} | D^\alpha x(t) |, & m > l - v, \\ \text{при} & v - \text{ нецелом}. \end{cases}$$

Здесь через $\rho(t)$ обозначено расстояние от точки $t \in D$ до границы ∂D области $D : \rho(t) = \operatorname{dist}(t, \partial D) = \inf_{\tau \in \partial D} | t - \tau | \quad (t \in D)$.

Обозначим шар радиуса r с центром в точке t_0 через $B(t_0, r) = \{t \in$
$\in R^l :| t - t_0 |< r\}(t_0 \in R^l, r > 0)$.

В [56] доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть условие (4.2) выполнено при $\beta = 0$ для $t, \tau \in$
$\in D$, а при $\beta \neq 0-$ для $t \in D, \tau \in B(t, \rho(t))$. Тогда, если при данном $f \in C^{m,v}(D)$ уравнение (4.1) разрешимо в $L_1(D)$, то любое решение $x(t) \in L_1(D)$ принадлежит также и $C^{m,v}(D)$, причем $\| x(t) \|_{m,v} \leq$
$\leq A_1 \| x \|_{L_1} + A_2 \| f \|_{m,v}$, где постоянные A_1 и A_2 не зависят от $x(t)$ и $f(t)$.

Вначале исследуем приближенное решение уравнения (4.1) методом сплайн-коллокации.

Нам понадобятся некоторые утверждения об аппроксимации функций из $C^{m,v}$ локальными сплайнами. Доказательства этих утверждений проводятся по аналогии с доказательствами, проведенными
в гл. I, где восстанавливаются функции из $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Пусть N – целое число, $\gamma = m - (l - v)$. Обозначим через Δ_k множество точек $t \in D$, удовлетворяющих неравенствам $(k/N)^q \leq$
$\leq \rho(t, \partial D) \leq ((k + 1)/N)^q, k = 0, 1, \dots, N - 1,\ q = m/r, r = l - v$. Покроем область Δ_k кубами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, ребра которых равны $h_k = ((k+$
$+1)/N)^q - (k/N)^q, k = 0, 1, \dots, N - 1$. Обозначим через n число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих область $\overline{D}$.

Повторяя рассуждения , приведенные в гл. I, убеждаемся, что $n =$
$= n(q)$, где $n(q)$ определено формулой (3.11).

Функцию $f(t_1, \dots, t_l)$ в параллелепипеде $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{m,\dots,m}(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$, построение которого описано в предыдущем параграфе.

Локальный сплайн, составленный из полиномов $P_{m,\dots,m}(f, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ и аппроксимирующий функцию $f(t_1, \dots, t_l)$ в области $\overline{D}$, обозначим через $f_N(t)$.

Обозначим

$$\hat{n}(\xi) \equiv \begin{cases} n^{-r/(l-1)}, & q > l/(l-1), \\ n^{-m/l}, & q < l/(l-1), \\ n^{-m/l}\ln^{\xi} n, & q = l/(l-1), \end{cases}$$

где $r = l - v$.

По аналогии с рассуждениями, проведенными в гл. I, доказываются следующие утверждения.

Теорема 4.2 [35]. Пусть $\overline{D} = [-1,1]^l, l \geq 2, r = l - v, l - v$ — нецелое, $q = m/r$. Справедливы оценки

$$\delta_n(C^{m,v}(\overline{D})) \asymp d_n(C^{m,v}(\overline{D}), \overline{D}) \asymp \hat{n}(1),$$

причем эти оценки реализуются построенными выше локальными сплайнами.

Теорема 4.3 [35]. Пусть $\overline{D} = [-1,1]^l, l \geq 2, r = l - v, q = m/r$. Пусть $l - v$ — натуральное число. Справедливы оценки

$$\delta_n(C^{m,v}(\overline{D})) \geq A\hat{n}(m/l),\ d_n(C^{m,v}(\overline{D}), C) \leq A\hat{n}(m/l)\mathrm{lnn},$$

причем оценки поперечника Колмогорова $d_n(C^{m,v}(\overline{D}), C)$ реализуются построенными выше локальными сплайнами.

Обозначим через L_N оператор проектирования из пространства C на множество локальных сплайнов $L_N f(t_1, \ldots, t_l) = f_N(t_1, \ldots, t_l)$.

Приступим к изложению метода коллокации. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде локального сплайна $x_N(t)$, значения которого в узлах интерполяции определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N \equiv x_N(t) + L_N \left[\int\limits_D h(t,\tau) x_N(\tau) d\tau \right] = L_N f(t). \tag{4.3}$$

В предположении, что оператор $K \in B[C, C]$ непрерывно обратим, докажем однозначную разрешимость системы уравнений (4.3). Для этого воспользуемся методом, предложенным в [57] в случае одномерных слабосингулярных уравнений.

Из приведенных выше утверждений вытекает, что для любой непрерывной функции $f \in C(\overline{D})$ $\lim_{N\to\infty} \| f - L_N(f) \| = 0$.

Оператор H — компактный. Значит, $\lim \| H - L_N H \|_{L_\infty \to L_\infty} = 0$ при $N \to \infty$. Из этого соотношения и обратимости оператора K^{-1} следует обратимость оператора K_N^{-1}.

Пусть $x^*(t)$ и $x_N^*(t)$ — решения уравнений (4.1) и (4.3) соответственно. Воспользуемся соотношением $x_N^*(t) - x^*(t) = (I - L_N T)^{-1} \times \times (L_N x^* - x^*)$, приведенным в [57, с. 45]. Переходя в этом равенстве к нормам и воспользовавшись утверждениями теорем 4.1 и 4.2 об аппроксимации функций из $C^{m,v}$, получаем оценки погрешности:

1) $\| x_N^* - x^* \| \leq AN^{-m}$, если $l - v$ — ненатуральное число;

2) $\| x_N^* - x^* \| \leq AN^{-m}\ln N$, если $l - v$ — натуральное число.

Отметим, что первая из оценок не может быть улучшена (по порядку) ни при каком способе решения уравнения (4.1), использующем значения функции $h(t,\tau)$ в произвольных n^2 узлах, расположенных в $\overline{D}$, а функции $f(t)$ − в произвольных n узлах, расположенных в области $\overline{D}$. Доказательство этого утверждения проводится так же, как в §3.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4.4 [35]. Пусть выполнены следующие условия: 1) оператор K непрерывно обратим из L_∞ в L_∞; 2) $f(t) \in C^{m,v}$. Пусть $r = l - v, q = m/r$. Тогда при достаточно больших N система уравнений (4.3) однозначно разрешима и справедливы оценки $\| x^* - x^*_N \| \leq$
$\leq A\hat{n}(m/l)$, если r − нецелое число; $\| x^* - x^*_N \| \leq A\hat{n}(m/l)\ln n$, если r − целое число. Здесь x^* и x^*_N − решения уравнений (4.1) и (4.3) соответственно. При $r-$ нецелых вычислительная схема (4.3) оптимальна по точности (по порядку) среди всевозможных алгоритмов, использующих значения функций $h(t,\tau)$ и $f(t)$ в произвольных n^2 и n узлах соответственно.

Замечание. При решении практических задач необходимо вычислять интегралы, стоящие в левой части системы уравнений (4.3).

В случае, когда уравнение (4.1) имеет вид

$$x(t) = \int\limits_G \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{r(t,\tau)} d\tau + f(t), \tag{4.4}$$

где $r(t,\tau) = ((t_1 - \tau_1)^2 + \ldots + (t_l - \tau_l)^2))^\eta$, его приближенное решение ищется в виде сплайна x_N, значения которого в узлах интерполяции определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$x_N(t) = P_N \left[\int\limits_D \frac{P^\tau_N[h(t,\tau)]x_N(\tau)d\tau}{r(t,\tau)} \right] + P_N[f(t_1,\ldots,t_l)]. \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что для этой системы справедливы утверждения теоремы 4.4.

5. Оптимальные по сложности алгоритмы приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма

В этом параграфе строятся оптимальные по порядку по сложности алгоритмы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_D h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \qquad (5.1)$$

с ядрами, принадлежащими классам функций $Q_{r,\gamma}(G, M)$ и $B_{r,\gamma}(G)$, $D =$ $= [-1,1]^l, G = [-1,1]^{2l}, l = 1,2,\dots,$ $t = (t_1,\dots,t_l)$, $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_l)$.

Предполагается, что в уравнении (5.1) минимальное расстояние от единицы до собственного значения уравнений больше $d(d > 0)$.

В качестве набора простейших операций здесь берется набор P={ вычисление значений функций, арифметические операции}.

Параграф написан по материалам статьи автора [37].

5.1. Оценки снизу

Оценим снизу число арифметических действий, необходимых для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида (5.1).

Вначале проведем исследование в случае, когда $h(t,\tau) \in \Psi_1, f(t) \in$ $\in \Psi_2$, где $\Psi_1 = Q_{r,\gamma}([-1,1]^{2l}, M), \Psi_2 = Q_{r,\gamma}([-1,1]^l, M)$, $l = 2,3,\dots$.

Будем считать, что уравнение (5.1) однозначно решимо и что расстояние от единицы до множества собственных значений оператора H больше, чем $d > 0$. Будем также считать, что для вычисления значений функций $h(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l), f(t_1,\dots,t_l)$ в произвольно фиксированных узлах $(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l)$ и $(t_1\dots,t_l)$ требуется равномерное (для каждой функции в отдельности) число арифметических действий.

Теорема 5.1. Пусть $h(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l) \in \Psi_1, f(t_1,\dots,t_2) \in \Psi_2$, где $\Psi_1 = Q_{r,\gamma}([-1,1]^{2l}, M), \Psi_2 = Q_{r,\gamma}([-1,1]^l, M), l = 2,3,\dots$. Тогда

$$E(n,\Psi_1,\Psi_2,d) \geq A \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(2l-1)}, & v > 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l}(\ln n)^{(s+2l-\gamma)/(2l+1)}, & v = 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l}, & v < 2l/(2l-1), \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $v = (s+2l)/(s+2l-\gamma)$.

Доказательство. Оценим снизу верхнюю грань функционала

$$Jh = \int\limits_D \int\limits_D h(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l)dt_1\dots dt_l d\tau_1\dots d\tau_l \qquad (5.3)$$

в предположении, что $h(t_1,\dots,t_{2l}) \in \Psi_1$ и что она обращается в нуль в n узлах подынтегральной функции, которые при доказательстве теоремы будем называть узлами функционала Jh.

Разобьем куб $G = D \times D$ на более мелкие кубы. Предварительно разобьем куб G на области G^k, состоящие из точек $t = (t_1, \ldots, t_{2l})$, расстояние $\rho(t, \partial G)$ от которых до границы ∂G области G удовлетворяет неравенствам

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \leq \rho(t, \partial G) \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^v, \quad v = \frac{(s+2l)}{(s+2l-\gamma)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Пусть $h_k = ((k+1)/N)^v - (k/N)^v, k = 0, 1, \ldots, N-1$. Покроем каждую из областей G^k кубами $G^k_{i_1,\ldots,i_{2l}}$ с ребрами, равными h_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, и с гранями, параллельными граням куба G. То обстоятельство, что в каждой области G^k может оказаться 2^{2l} параллелепипедов, не сказывается на общности рассуждений.

Обозначим через n общее число кубов $G^k_{i_1,\ldots,i_{2l}}$. Повторяя рассуждения, проведенные в гл. I, можно показать, что числа n и N связаны соотношениями

$$n \asymp A \begin{cases} N^{v(2l-1)}, & v > 2l/(2l-1); \\ N^{2l}, & v < 2l/(2l-1); \\ N^{2l} \ln N, & v = 2l/(2l-1). \end{cases} \tag{5.4}$$

Пусть $n_1 = 2n$ и N_1- целое число, связанное с n_1 соотношениями (5.4). Повторяя описанные выше построения, покроем куб G кубами $\overline{G}^k_{i_1,\ldots i_{2l}}$, $k = 0, 1, \ldots, N_1-1$, с ребрами $\overline{h}_k = ((k+1)^v - k^v)/N_1^v$, $k = 0, 1, \ldots, N_1-1$. В результате этих построений куб G оказывается покрытым $2n$ кубами $\overline{G}^k_{i_1,\ldots i_{2l}}, k = 0, 1, \ldots, N_1-1$. Так как функция h обращается в нуль только в n узлах, то в n кубах из множества $\overline{G}^k_{i_1,\ldots i_{2l}}, k = 0, 1, \ldots, N_1-1$, отсутствуют узлы функционала J. Назовем эти кубы отмеченными.

Введем функцию $g(t_1, \ldots, t_{2l})$, определенную в кубе G и равную нулю в неотмеченных кубах. В произвольно фиксированном отмеченном кубе $\overline{G}^k_{i_1,\ldots i_{2l}} = [a^k_{i_1}, a^k_{i_1+1}; \ldots; a^k_{i_{2l}}, a^k_{i_{2l}+1}], k = 0, 1, \ldots, N_1-1$, функция $g(t_1, \ldots, t_{2l})$ равна

$$\overline{g}^k_{i_1,\ldots,i_{2l}} = A\frac{[(t_1 - a^k_{i_1})(a^k_{i_1+1} - t_1) \cdot \ldots \cdot (t_{2l} - a^k_{i_{2l}})(a^k_{i_{2l}+1} - t_{2l})]^s}{\overline{h}_k^{s(4l-1)}(k/N_1)^{v\gamma}},$$

где константа A подбирается из требования $g \in Q_{r,\gamma}(G, M)$. Можно показать , что такая константа существует и не зависит от индексов $k = 0, 1, \ldots, N_1-1, i_1, \ldots, i_{2l}$. Несложные выкладки дают оценку

$$\int \dots \int\limits_{\overline{G}^k_{i_1,\dots,i_{2l}}} g(t_1,\dots,t_{2l})dt_1\dots dt_{2l} = A_1 N^{-(s+2l)}, \qquad (5.5)$$

справедливую для любого куба $\overline{G}^k_{i_1,\dots,i_{2l}}, k = 0,1,\dots,N_1-1$, в котором отсутствуют узлы функционала J. Так как число таких кубов не меньше n, то

$$Jg \ge nAN^{-(s+2l)} = A \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(2l-1)}, & v > 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l}(\ln n)^{(s+2l-\gamma)/(2l-1)}, & v = 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l}, & v < 2l/(2l-1). \end{cases}$$

Получена оценка снизу верхней грани функционала Jh на множестве функций из $Q_{r,\gamma}(G,M)$, обращающихся в нуль в n узлах.

Получив оценки снизу точности аппроксимации функционала Jh, перейдем к оценке снизу числа арифметических действий, необходимых для приближенного решения уравнения (5.1) с точностью (5.2). При этом воспользуемся рассуждениями из [80].

Рассмотрим два интегральных уравнения

$$x_1(t) = \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} h_1(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l)x_1(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l + \beta, \qquad (5.6)$$

$$x_2(t) = \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} h_2(t_1,\dots,t_l,\tau_1,\dots,\tau_l)x_2(\tau_1,\dots,\tau_l)d\tau_1\dots d\tau_l + \beta, \qquad (5.7)$$

где $h_1(t,\tau) = \alpha + h(t,\tau), h_2(t,\tau) = \alpha, \alpha < M/2,\ \alpha < (1+2d)/2^l, \beta < < M, 0 \le |h(t,\tau)| < \alpha$. В качестве функции $h(t,\tau)$ возьмем функцию $h(t,\tau) = \alpha g(t,\tau)/(\max_{(t,\tau)\in[-1,1]^{2l}} |g(t,\tau)|)$ где g – функция, построенная при исследовании функционала Jh.

Тогда уравнения (5.6) и (5.7) однозначно разрешимы и расстояние от 1 до любого собственного значения больше, чем d. Из (5.6) следует, что $x_1(t) > \beta > 0$. Вычитая уравнение (5.7) из уравнения (5.6), имеем:

$$x_1(t) - x_2(t) =$$

$$= \alpha \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} (x_1(t) - x_2(t))dt + \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)x_1(\tau)d\tau. \qquad (5.8)$$

Интегрируя равенство (5.8) и учитывая, что $x_1(t) > 0$, получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} (x_1(\tau_1, \dots, \tau_l) - x_2(\tau_1, \dots, \tau_l)) d\tau_1 \dots d\tau_l =$$

$$= \alpha 2^l \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} (x_1(\tau_1, \dots, \tau_l) - x_2(\tau_1, \dots, \tau_l)) d\tau_1 \dots d\tau_l +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} h(t_1, \dots, t_l, \tau_1, \dots, \tau_l) x_1(\tau_1, \dots, \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l dt_1 \dots dt_l.$$

Отсюда следует, что

$$\|x_1(\tau_1, \dots, \tau_l) - x_2(\tau_1, \dots, \tau_l)\| \geq$$

$$\geq \frac{\beta}{1 - \alpha 2^l} \int\limits_{-1}^{1} \dots \int\limits_{-1}^{1} h(t_1, \dots, t_l, \tau_1, \dots, \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l dt_1 \dots dt_l \geq$$

$$\geq A \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(2l-1)}, & v > 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l} (\ln n)^{(s+2l-\gamma)/(2l+1)}, & v = 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l}, & v < 2l/(2l-1) \end{cases}$$

и, следовательно,

$$E(n, \Psi_1, \Psi_2, d) \geq A \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(2l-1)}, & v > 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l} (\ln n)^{(s+2l-\gamma)/(2l+1)}, & v = 2l/(2l-1); \\ n^{-s/2l}, & v < 2l/(2l-1). \end{cases}$$

Теорема доказана.

Теорема 5.2. Пусть $h(t_1, \dots, t_l, \tau_1, \dots, \tau_l) \in \Psi_1, f(t_1, \dots, t_2) \in \Psi_2$, где $\Psi_1 = B_{r,\gamma}([-1,1]^{2l}), \Psi_2 = B_{r,\gamma}([-1,1]^l), l = 1, 2, \dots$. Тогда

$$E(n, \Psi_1, \Psi_2, d) \geq A n^{-(r+2-\gamma)/(2l-1)}. \tag{5.9}$$

Доказательство теоремы 5.2 подобно доказательству теоремы 5.1.

5.2. Оптимальные по сложности алгоритмы

Построим итерационно - проекционные методы, реализующие оценки, полученные в теоремах 5.1 и 5.2. Так как эти построения проводятся аналогично для обоих классов функций , то остановимся на построении алгоритма для класса $B_{r,\gamma}$, так как он технически более сложен.

Рассмотрим уравнение (5.1). Пусть функция $f(t) \in B_{r,\gamma}(D)$, а функция $h(t,\tau)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(G)$. При этом предположении будем говорить, что выполнено условие A.

Для построения и обоснования приближенных методов решения уравнения (5.1) при условиях A необходимо предварительно исследовать точность аппроксимации функции $g(t_l,\ldots,t_l) \in B_{r,\gamma}(D)$ локальными сплайнами. Напомним построения, проведенные в гл. I.

Обозначим через $\Delta_k, k = 1,\ldots,N$, множество точек $t = (t_l,\ldots,t_l)$ из области D, расстояние от которых до границы Γ области D удовлетворяет неравенствам $(e^{k-1}/e^N)^v \le \rho(t,\Gamma) \le (e^k/e^N)^v$, где $v =$
$= 1/w, w = 2Ae$ при $2Ae > 1$ и $v = \ln 2$ при $2Ae \le 1$, а через Δ_0 множество точек $t \in D$, таких, что $0 \le \rho(t,\Gamma) \le e^{-Nv}$.

Каждую область Δ_k покроем кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, грани которых параллельны осям координат, а ребра равны $h_k = e^{(k-N)v} - e^{(k-1-N)v}$ при $k = 1,2,\ldots,N$ и $h_0 = e^{-Nv}$ при $k = 0$.

При этом в каждой области Δ_k при таком способе построения покрытия среди кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ может оказаться 2^l параллелепипедов.

Общее число n элементов покрытия оценивается соотношением $n = Ce^{Nv(l-1)}$, $C =$ const.

Пусть $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [a^k_{i_1}, a^k_{i_1+1};\ldots;a^k_{i_l}, a^k_{i_l+1}]$. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $g(t_1,\ldots,t_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом
$g_N(t_1,\ldots,t_l,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) = P_{u,\ldots,u}g(t_1,\ldots,t_l)$. Здесь $P_{u,\ldots,u} = P^{t_1}_u \ldots P^{t_l}_u$, а через $P^{t_i}_u$ обозначен интерполяционный полином P_u, действующий по переменной $t_i, i = 1,2,\ldots,l$. Положим $u = s$ при $k = 1,2,\ldots,N$ и $u = r$ при $k = 0$. Кроме того, положим $s = [(r+1-\gamma)N/(2Ae)]+1$ при $w = 2Ae > 1$ и $s = [(r+1-\gamma)N/(1+\log_2 e)]+1$ при $w \le 1$.

Локальный сплайн, определенный в D и состоящий из полиномов $g_N(t_1,\ldots,t_l;\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, будем обозначать $g_N(t_1,\ldots,t_l)$. Множество локальных сплайнов, построенных описанным выше способом, обозначим через LS_N.

В гл. I была оценена погрешность аппроксимации функций из $B_{r,\gamma}$ локальными сплайнами. Было показано, что

$$\| g(t) - g_N(t) \| \le n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}, \tag{5.10}$$

где $n-$ общее число функционалов, используемых при построении сплайна $g_N(t)$.

Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде локального сплайна $x_N(t_1,\dots,t_l) \in LS_N$ с неопределенными пока значениями в узлах интерполяции. Эти значения определяются из уравнения, которое в операторной форме имеет вид

$$x_N(t) + L_N^t\left[\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)x_N(\tau)]d\tau\right] = L_N[f(t)], \qquad (5.11)$$

где через L_N обозначен оператор проектирования на множество сплайнов из LS_N; верхний индекс τ в операторе проектирования L_N^τ означает, что проектирование проводится по переменной τ.

Из полученной выше оценки (5.10) погрешности аппроксимации локальными сплайнами и из общей теории приближенных методов анализа следует, что если оператор $K \in [C, C]$ непрерывно обратим и выполнены условия А, то при N таких, что $q = Cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)} < 1$, система уравнений (5.11) имеет единственное решение $x_N^0(t)$ и справедлива оценка $\| x_N^0 - x^* \| \leq Cn^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}$, где x^*- решение уравнения (5.1), n $-$ число , связанное с N соотношением $n = Ce^{Nv(l-1)}$.

Введем оператор

$$K_N x \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)x(\tau)]d\tau. \qquad (5.12)$$

Оператором, обратным к оператору K_N, является оператор K_N^{-1}, который определяет решение уравнения $K_N x = g$ по формуле

$$x(t) = g(t) - \int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)x_N(\tau)]d\tau,$$

где $x_N(t)-$ решение уравнения (5.11) при правой части, равной $L_N g$.

Покажем, что при достаточно больших N (таких, что уравнение (5.11) однозначно разрешимо) линейный оператор K_N отображает банахово пространство C на себя. Обозначим через $\overline{C}$ множество образов $K_N x, x \in C$. Очевидно, $\overline{C}-$ подпространство пространства C. Покажем, что оператор K_N однозначно отображает C на $\overline{C}$. Предположим, что это не так. Тогда уравнение $K_N x = f$ имеет несколько решений x_1, x_2 и, следовательно, их разность $z = x_1 - x_2$ является решением уравнения $K_N z = 0$. Отсюда следует, что $L_N K_N z = 0$. Это уравнение эквивалентно уравнению

$$z_N(t) + L_N^t\left[\int\limits_{-1}^{1}\dots\int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)z_N(\tau)]d\tau\right] = 0, \qquad (5.13)$$

где $z_N \in LS_N$. Отсюда следует, что $z_N = 0$ и $z = 0$. Так как оператор K_N однозначно отображает C на $\overline{C}$, то единица не является собственным значением оператора K_N, и он отображает взаимно однозначно C на C. Следовательно, по теореме Банаха он непрерывно обратим.

Введем операторы $K_{N_i}, i = 1, 2$, которые строятся следующим образом (числа N_i определяются ниже). Пусть n_i- целое число, связанное с N_i формулой $n_i = e^{N_i v(l-1)}$. Потребуем, чтобы n_i было кратным n и, кроме того, чтобы число $m = n_i/n$ было представимо в виде $m = m_0^l$, где m_0- целое число. Разделим каждый куб $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ на m равных кубов, которые будем обозначать через $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$. В каждом кубе $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $g(t_1, \ldots, t_l)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом $g_{N_1}(t_1, \ldots, t_l; \overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}) = P_{u,\ldots,u} g(t_1, \ldots, t_l)$, где значения u определяются, как и выше. Локальный сплайн, определенный в D и состоящий из полиномов $g_{N_1}(t_1, \ldots, t_l; \overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l})$, будем обозначать через $\overline{g}_{N_1}(t_1, \ldots, t_l)$. Оператор проектирования из пространства C на множество локальных сплайнов $\overline{g}_{N_1}(t_1, \ldots, t_l)$ обозначим через $\overline{L}_{N_i}$.

Операторы K_{N_i} имеют вид

$$K_{N_i} x \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \overline{L}^{\tau}_{N_i} [h(t, \tau) x(\tau)] d\tau. \qquad (5.14)$$

Построим, следуя [80], последовательные приближения уравнения (5.1)

$$x'_N = K_N^{-1}(K_{N_1} - K_N) x_N^0 + K_N^{-1} f, \qquad (5.15)$$

$$x''_N = K_N^{-1}(K_{N_2} - K_N) x'_N + K_N^{-1} f, \qquad (5.16)$$

где x_N^0- решение уравнения $K_N x = f$.

Последовательно вычитая из уравнения (5.1) уравнения $K_N x = f$, (5.15), (5.16) и учитывая, что $x^* = K_N^{-1}(K - K_N) x^* + K_N^{-1} f$, имеем

$$x^* - x_N^0 = K_N^{-1}(K - K_N) x^*, \qquad (5.17)$$

$$x^* - x'_N = K_N^{-1}(K - K_N)(x^* - x_N^0) + K_N^{-1}(K - K_{N_1}) x_N^0, \qquad (5.18)$$

$$x^* - x''_N = K_N^{-1}(K - K_N)(x^* - x'_N) + K_N^{-1}(K - K_{N_2}) x'_N. \qquad (5.19)$$

Из соотношений (5.17), (5.18), (5.19) следуют оценки

$$\|x^* - x_N^0\| = A \|K - K_N\|, \qquad (5.20)$$

$$\|x^* - x'_N\| = A(\|K - K_N\|^2 + \|K - K_{N_1}\|), \tag{5.21}$$

$$\|x^* - x''_N\| = A(\|K - K_N\|^3 + \|K - K_N\|\|K - K_{N_1}\| + \|K - K_{N_2}\|). \tag{5.22}$$

Следовательно,

$$\|x^* - x''_N\| = A(\|K - K_N\|^3 + \|K - K_N\|\|K - K_{N_1}\| + \|K - K_{N_2}\|). \tag{5.23}$$

Определим числа N_1, N_2 и подсчитаем число арифметических действий, необходимых для вычисления x''_N. При вычислении x^0_N, x'_N и x''_N система уравнений (5.11) решается три раза. При использовании метода Гаусса это потребует An^3 арифметических действий. При вычислении операторов K_{N_1} и K_{N_2} в n узлах требуется Ann_1 и Ann_2 арифметических действий. Таким образом, общее число арифметических действий, достаточное для нахождения x''_N, равно $A(n^3 + nn_1 +$
$+nn_2)$.

Предположим, что для решения уравнения (5.1) используется n_* значений функции $h(t,\tau)$. Тогда, полагая

$$n = [n_*^{\frac{r+2-\gamma}{3(r+1-\gamma)}\frac{l-1}{2l-1}}], \quad n_1 = [n_*^{\frac{2}{3}\frac{r+2-\gamma}{r+1-\gamma}\frac{l-1}{2l-1}}], \quad n_2 = [n_*^{\frac{r+2-\gamma}{r+1-\gamma}\frac{l-1}{2l-1}}],$$

убеждаемся, что погрешность метода равна $\|x^* - x''\| \le An_*^{-\frac{r+2-\gamma}{2l-1}}$ при числе арифметических действий $n_*^{\frac{4}{3}\frac{r+2-\gamma}{r+1-\gamma}\frac{l-1}{2l-1}}$.

Отсюда следует, что при r и l таких, что $\frac{4}{3}\frac{r+2-\gamma}{r+1-\gamma}\frac{l-1}{2l-1} \le 1$,

$$\|x^* - x''\| \le An_*^{-\frac{r+2-\gamma}{2l-1}}$$

при числе арифметических действий An_*.

Следовательно, изложенный метод – оптимальный по порядку по сложности при указанных соотношениях r и l.

Аналогичным образом строится оптимальный метод и для уравнений с ядрами, принадлежащими $Q_{r,\gamma}$.

Замечание 1. Воспользовавшись алгоритмом Штрассена [2] решения систем линейных уравнений, можно уточнить соотношения параметров r и l, при которых изложенный выше метод будет оптимальным по порядку.

Замечание 2. Воспользовавшись полученными выше оценками интегральных операторов и связью между величинами s-чисел вполне непрерывных операторов и их аппроксимациями конечномерными операторами [71, с.48], можно существенно уточнить известные оценки s-чисел интегральных операторов с ядрами из пространств $Q_{r,\gamma}$ и $B_{r,\gamma}$.

6. Оптимальные по сложности алгоритмы приближенного решения одномерных слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма

В этом параграфе построены оптимальные по порядку по сложности алгоритмы решения слабосингулярных интегральных уравнений вида

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_0^1 h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{6.1}$$

с ядрами, имеющими степенные особенности.

Предполагается, что в уравнении (6.1) минимальное расстояние от 1 до собственного значения уравнения больше $d (d > 0)$.

В дальнейшем будем рассматривать два близких класса, к которым принадлежат ядра уравнения (6.1).

Класс Ψ_1, состоящий из функций $h(t_1,t_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\|h^{(v)}(t_1,t_2)\|_C \le M, \quad 0 \le |v| \le r; \tag{6.2}$$

$$|h^{(v)}(t_1,t_2)| \le \frac{M}{|t_1-t_2|^{|v|-r-1+\gamma}}, \quad r+1 \le |v| \le s, \tag{6.3}$$

где $h^{(v)}(t_1,t_2) = \partial^{|v|}h(t_1,t_2)/\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}, v = (v_1,v_2), |v| = v_1 + v_2$,
и класс Ψ_1^1, состоящий из функций $h(t_1,t_2)$, удовлетворяющих условиям

$$|h^{(v)}(t_1,t_2)| \le \frac{M}{|t_1-t_2|^{|v|+\gamma}}, \quad 0 \le |v| \le s, \tag{6.4}$$

где $0 < \gamma < 1$.

В качестве Ψ_2 возьмем класс функций $W^s(M), s = 1, 2, \ldots$.

Теорема 6.1 [37]. Пусть $h(t_1,t_2) \in \Psi_1, f(t) \in \Psi_2$. Тогда

$$fE(n,\Psi_1,\Psi_2,d) \ge A \left\{ \begin{array}{cc} n^{-(r+2-\gamma)}, & v > 2; \\ n^{-s/2}(\ln n)^{(s+2)/2}, & v = 2; \\ n^{-s/2}, & v < 2, \end{array} \right. \tag{6.5}$$

где $v = (s+2)/(r+3-\gamma)$.

Теорема 6.2 [37]. Пусть $h(t_1,t_2) \in \Psi_1^1, f(t) \in \Psi_2$. Тогда

$$E(n,\Psi_1^1,\Psi_2,d) \ge A \left\{ \begin{array}{cc} n^{-(2-\gamma)}, & v_1 > 2; \\ n^{-s/2}(\ln n)^{(s+2)/2}, & v_1 = 2; \\ n^{-s/2}, & v_1 < 2, \end{array} \right. \tag{6.6}$$

где $v_1 = (s+2)/(2-\gamma)$.

Доказательства обеих теорем проводятся аналогично, и поэтому остановимся на доказательстве теоремы 6.2.

Доказательство теоремы 6.2. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5.1 из предыдущего параграфа . Поэтому остановимся только на некоторых отличиях в доказательствах.

Оценим снизу верхнюю грань функционала

$$Jh = \int_0^1 \int_0^1 h(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

в предположении, что $h \in \Psi_1$ и обращается в нуль в n произвольным образом расположенных узлах.

Разобьем квадрат $D = [0,1]^2$ на более мелкие квадраты. Для этого введем области D_k^+ и D_k^-, расположенные выше и ниже главной диагонали $B = \{t_1 = t_2\}$ квадрата D, такие, что для точек, лежащих в этих областях, справедливы неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{k}{N}\right)^v \le \rho(t, B) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{k+1}{N}\right)^v,$$

где $v = (s+2)/(r+2-\gamma)$.

В каждой из областей D_k^+ и D_k^- разместим квадраты со сторонами, равными $h_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v \right), k = 0, 1, 2, \ldots,$ причем в каждой из областей D_k^+ и D_k^- вместо двух квадратов могут быть трапеции и треугольники. Отметим также, что квадраты D_k^+ и D_k^- имеют две стороны, параллельные диагонали D. Общее число квадратов $D_k^\pm$ равно

$$n \asymp A \begin{cases} N^v, & v > 2; \\ N^2, & v < 2; \\ N^2 \ln N, & v = 2. \end{cases} \tag{6.7}$$

Пусть $n_1 = 2n$ и N_1- целое число, связанное с n_1 соотношениями (6.7). Повторяя описанные выше построения, покроем квадрат D квадратами $\overline{D}_{k,l}^\pm, k = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, с ребрами $\overline{h}_k = ((k+1)^v - -k^v)/N_1^v, k = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$. В результате этих построений квадрат D оказывается покрытым $2n$ квадратами $\overline{D}_{i_1,\ldots i_{2l}}^k, k = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$. Так как для вычисления функционала Jh используется только n узлов, то в n квадратах из множества $\overline{D}_{i_1,\ldots i_{2l}}^k, k =$

$0, 1, \ldots, N_1 - 1$, отсутствуют узлы функционала Jh. Повторяя теперь рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 5.1 из предыдущего параграфа, убеждаемся в справедливости теоремы.

Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_0^1 \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{|\tau - t|^\gamma} d\tau = f(t),$$

где $h(t,\tau) \in H_{\alpha\alpha}$, $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \gamma < 1$.

Повторяя проведенные выше рассуждения, убеждаемся, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.3 [37]. Пусть $h(t_1, t_2) \in \Psi_3 = H_{\alpha\alpha}$, $f(t) \in \Psi_4 = H_\alpha$. Тогда $E(n, \Psi_3, \Psi_4, d) \geq An^{-\alpha/2}$.

Построим оптимальный по сложности алгоритм приближенного решения уравнения (6.1).

Для определенности остановимся на случае, когда $h \in \Psi_1, f \in \Psi_2$.

Обозначим через $\mu_k, k = 1, 2, \ldots, s$, узлы полинома Лежандра s-го порядка, расположенные в сегменте $[-1, 1]$, а через $\mu'_k, k = 1, 2, \ldots, s,-$ их образы при отображении $[-1, 1]$ на $[a, b]$. Пусть $L_s(f, [a, b])-$ интерполяционный полином порядка $s - 1$, интерполирующий функцию $f(t)$ по узлам $\mu'_k, k = 1, 2, \ldots, s$, в сегменте $[a, b]$.

Обозначим через Γ границу сегмента $[-1, 1]$, т.е. точки ± 1. Пусть $t_k^1 = -1 + (k/N)^v, t_k^2 = 1 - (k/N)^v, k = 0, 1, \ldots, N$. Введем сегменты $\Delta_k^1 = [t_k^1, t_{k+1}^1], \Delta_k^2 = [t_{k+1}^2, t_k^2], k = 0, 1, \ldots, N - 1$. Сплайн, аппроксимирующий функцию $f(t)$ и составленный из полиномов $L_s(f, \Delta_k^i)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, обозначим через $f_N(t)$. Множество локальных сплайнов, построенных указанным способом, обозначим через LS_N. Оператор проектирования на множество локальных сплайнов LS_N обозначим через L_N. Приближенное решение уравнения (6.1) будем искать в виде локального сплайна $x_N(t) \in LS_N$ с неопределенными пока коэффициентами. Эти коэффициенты определяются из системы алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N \equiv x_N(t) + L_N \left[\int\limits_{-1}^1 L_N^\tau \left[h(t,\tau) x_N(\tau) \right] d\tau \right] = L_N(f(t)). \qquad (6.8)$$

Из общей теории приближенных методов анализа следует, что при N таких, что $q = AN^{-r} < 1$, система уравнений (6.8) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_N^*\| \leq AN^{-r}$, где x^* и X_N – решения уравнений (6.1) и (6.8) соответственно.

Введем оператор

$$\overline{K}_N x \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)x(\tau)]d\tau. \tag{6.9}$$

Обратным оператором к оператору $\overline{K}_N$ является оператор $\overline{K}_N^{-1}$, который определяет решение уравнения $\overline{K}_N x = g$ по формуле

$$x(t) = g(t) - \int\limits_{-1}^{1} L_N^\tau[h(t,\tau)x_N(\tau)]d\tau, \tag{6.10}$$

где $x_N(t)$– решение уравнения (6.8) при правой части $L_N[g]$.

При N таких, что система уравнений (6.8) однозначно разрешима (для этого достаточно, чтобы $q = AN^{-r} < 1$), линейный оператор $\overline{K}_N$ отображает банахово пространство C на себя. Следовательно, по теореме Банаха он непрерывно обратим.

Введем операторы $\overline{K}_{N_i}, i = 1, 2,$

$$\overline{K}_{N_i} x \equiv x(t) + \int\limits_{-1}^{1} L_{N_i}^\tau[h(t,\tau)x(\tau)]d\tau. \tag{6.11}$$

Построим последовательные приближения

$$x_N' = \overline{K}_N^{-1}(\overline{K}_{N_1} - \overline{K}_N)x_N^0 + \overline{K}_N^{-1} f, \tag{6.12}$$

$$x_N'' = \overline{K}_N^{-1}(\overline{K}_{N_2} - \overline{K}_N)x_N' + \overline{K}_N^{-1} f, \tag{6.13}$$

где $N_1 = [n^{2/3}] + 1, N_2 = [n^{1/2}] + 1, N = [n^{1/3}] + 1, n$– число арифметических действий, используемых при построении алгоритма.

Отметим, что при вычислении последовательных значений x_N' и x_N'' сингулярные интегралы вычисляются по оптимальным по точности и сложности (одновременно) алгоритмам [27], [33], требующим AN арифметических действий и имеющим точность $AN^{-(r+\alpha)}$. Повторяя рассуждения, приведенные в §5, получаем оценку:

$$\|x^* - x_N"\| \leq An^{-(r+\alpha)/2}. \tag{6.14}$$

Таким образом, построен оптимальный по порядку (по точности) алгоритм приближенного решения уравнения (6.1).

7. Оптимальные по сложности методы решения многомерных слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма

Рассмотрим многомерные слабосингулярные интегральные уравнения вида

$$Kx \equiv x + Tx \equiv x(t) + \int\limits_D h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in D, \tag{7.1}$$

где D – внутренняя область параллелепипеда $\overline{D} = [-1,1]^l, l \geq 2$, $t = (t_1, \ldots, t_l), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$.

В §4 построен оптимальный по порядку (по точности) метод решения уравнений вида (7.1).

Ниже предлагается оптимальный по порядку (по сложности) метод решения слабосингулярных интегральных уравнений вида (7.1).

Пусть $G = [-1,1]^{2l}, l = 2, \ldots.$

Обозначим через Ψ_1 множество функций, для которых выполняется условие (4.2), а через Ψ_2– множество функций, принадлежащих пространству $C^{m,v}(D)$, описанному в § 4.

Теорема 7.1 [37]. Пусть $h(t,\tau) \in \Psi_1, f(t) \in \Psi_2, w = \frac{m+2l}{2l-v}$. Тогда

$$E(n,\Psi_1,\Psi_2,d) \geq A \begin{cases} n^{-(l-v)/l}, & w > (l+1)/l, \\ n^{-(l-v)/l}(\ln n)^{(2l-v)/l}, & w = (l+1)/l, \\ n^{-(m+l-1)/(l+1)}, & w < (l+1)/l. \end{cases} \tag{7.2}$$

Доказательство . Оценим снизу верхнюю грань функционала

$$Jh = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 h(t,\tau)dtd\tau$$

в предположении, что $h \in \Psi_1$ и обращается в нуль в n произвольным образом расположенных узлах, принадлежащих области G. Зафиксируем произвольное $i, 1 \le i \le l$, и рассмотрим квадрат $D_i = [0,1]^2$ на плоскости $0t_i\tau_i, i = 1,2,\dots,l$.

Пусть $N-$ целое число, величина которого определяется ниже. Разобьем квадрат $D_i(i = 1,2,\dots,l)$ на более мелкие квадраты $\Delta_{kj}^{\pm i}, k,j =$
$= 1,2,\dots,N_i, i = 1,2,\dots,l$, способом, аналогичным описанному в § 6. Отличие заключается в величине константы w, которая здесь равна $w = (m+2l)/(2l-v)$. В дальнейшем для простоты обозначений будем опускать символы $(\pm)$.

Общее число $n_i(i = 1,2,\dots,l)$ квадратов Δ_{kj}^i, которые можно разместить в квадрате D_i, определяется формулой (6.7). Пусть $\Delta_{j_1,\dots,j_l}^k =$
$= \Delta_{kj_1}^1 \cup \Delta_{kj_2}^2 \cup \dots \Delta_{kj_l}^l, k = 1,2,\dots,N, j_i = 1,2,\dots,N_i, i = 1,2,\dots,l.$

Общее число кубов $\Delta_{j_1,\dots,j_l}^k, \quad k = 0,1,\dots,N$, которые можно разместить в G, оценивается выражением

$$M \asymp \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{2 - 2(k/N)^w}{((k+1)/N)^w - (k/N)^w} \right)^l \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} N^{wl}, & w > (l+1)/l, \\ N^{wl} \ln N, & w = (l+1)/l, \\ N^{l+1}, & w < (l+1)/l. \end{cases} \qquad (7.3)$$

Пусть $M = 2n$. Подберем число N таким образом, чтобы выполнялось соотношение (7.3). Так как число точек, в которых функция $h(t,\tau)$ обращается в нуль, равно n, то имеется по крайней мере n кубов вида $\Delta_{j_1 \dots j_l}^k$, в которых функция $h(t,\tau)$ в нуль не обращается. Назовем эти кубы отмеченными. Для простоты обозначений в каждой плоскости $0t_i\tau_i(i = 1,2,\dots,l)$ введем новую систему координат, взяв в качестве осей диагонали первого и второго квадрантов. В произвольном отмеченном кубе $\Delta_{j_1,\dots,j_{2l}}^k =$
$[a_{j_1}^k, a_{j_1+1}^k; \dots; a_{j_{2l}}^k, a_{j_{2l}+1}^k]$ функция $h(t,\tau)$ определяется формулой

$$h_{j_1,\dots,j_{2l}}^k = A \frac{[(t_1 - a_{j_1})^k (a_{j_1+1}^k - t_1) \dots (t_{2l} - a_{j_{2l}}^k)(a_{j_{2l}+1}^k - t_{2l})]^m}{h_k^{m(4l-1)} (k/N)^{w(v+m)}}.$$

В дополнении объединения отмеченных кубов до области G функция $h(t,\tau)$ полагается равной нулю. Константа A выбирается таким образом, чтобы $h(t,\tau)\in\Psi_1$.

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\Delta^k_{j_1,\dots,j_{2l}}}\int h^k_{j_1\dots j_{2l}}(t,\tau)dtd\tau \geq AN^{-m-2l}. \tag{7.4}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{G}\int h(t,\tau)dtd\tau \geq AnN^{-m-2l}. \tag{7.5}$$

Из неравенств (7.4) и (7.5) следует справедливость теоремы.

Рассмотрим уравнение

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_{D} \frac{h(t,\tau)x(\tau)d\tau}{((\tau_1-t_1)^2+\ldots+(\tau_l-t_l)^2)^\gamma} = f(t), \tag{7.6}$$

где $h\in H_{\alpha,\dots,\alpha},\ f\in H_{\alpha,\dots,\alpha},\ 0\leq\gamma<l/2$.

Теорема 7.2 [37]. Пусть $h(t,\tau)\in\Psi_3 = H_{\alpha,\dots,\alpha},\ f(t)\in\Psi_4 = H_{\alpha,\dots,\alpha}$. Тогда

$$E(n,\Psi_3,\Psi_4,d) \geq A\begin{cases} n^{-(l+\alpha-\gamma)/l}, & w>(l+1)/l,\\ n^{-(l+\alpha-\gamma)/l}(\ln n)^{(2l+\alpha-\gamma)/l}, & w=(l+1)/l,\\ n^{-(l+\alpha-1)/(l+1)}, & w<(l+1)/l,\end{cases}$$

где $w=(\alpha+2l)/(\alpha+2l-\gamma)$.

Доказательство теоремы подобно доказательству теоремы 7.1.

Подобно тому, как это было сделано для одномерных слабосингулярных интегральных уравнений, строятся при соответствующих сочетаниях m,v,α,l,γ оптимальные по порядку (по сложности) алгоритмы приближенного решения уравнения (7.1) при условиях (4.2) и уравнения (7.6).

Замечание. Полученные выше результаты могут быть распространены и на интегральные уравнения с другими видами слабосингулярных ядер.

8. Оптимальные способы задания информации

Выше были построены оптимальные по точности методы решения интегральных уравнений Фредгольма на классах $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r\gamma}(\Omega)$ и слабосингулярных интегральных уравнений в предположении, что информационный оператор T задается значениями функций $h(t, \tau)$, $f(t)$, $t = (t_1, \dots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, в N узлах, причем значения функций $h(t, \tau)$ задаются в N_1 точках, а функции $f(t)$ – в N_2 точках, $N_1 + N_2 = N$.

Оказывается, что если функции $h(t, \tau)$ и $f(t)$ задавать не их значениями в узлах, а функционалами другого вида, то оценки точности и сложности решения упомянутых выше классов интегральных уравнений можно значительно усилить.

Пусть X – банахово пространство, F – класс функций, $\tilde{H}$ – множество линейных непрерывных операторов, действующих из X в X и таких, что уравнение

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int\limits_{\Omega} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \qquad (8.1)$$

$t = (t_1, \dots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, $l \geq 2$, однозначно разрешимо при любых $H \in \tilde{H}$ и $f \in F$.

Предположим, что информация о каждом уравнении (8.1) задается в виде вектора, состоящего из N функционалов $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)(\gamma_i = = \gamma_i(H), \quad i = 1, 2, \dots, N_1,\ \gamma_j = \gamma_j(f),\ j = N_1 + 1, \dots, N)$, причем для вычисления значений $\gamma_i(H)$, $\gamma_j(f)$, $i = 1, 2, \dots, N_1$, $j = N_1 + 1, \dots, N$, требуется $O(N^2)$ простейших операций, к которым относятся арифметические операции, вычисление значений функций, вычисление интегралов. (Отметим, что в §§ 5 – 7 под простейшими операциями понимались арифметические операции и операции вычисления значений функций).

Множество всевозможных наборов функционалов $(\gamma_1(H, f), \dots, \gamma_N(H, f))$ обозначим через $T_N[H, f]$.

Введем следующие классы функций. Через $Q_{r\gamma}(\Omega^2, M)$ обозначим множество функций $h(t, \tau)$, $t = (t_1, \dots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, которые при фиксированном t принадлежат классу $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ по переменной τ, а при фиксированном τ – классу $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$ по переменной t.

Через $B_{r\gamma}(\Omega^2)$ обозначим класс функций $h(t, \tau)$, которые при фиксированном t принадлежат классу $B_{r\gamma}(\Omega)$ по переменной τ, а при фиксированном τ – классу функций $B_{r\gamma}(\Omega)$ по переменной t.

Напомним, что класс функций $C^{m,v}(\Omega)$ был описан в § 4.

Пусть $\Psi_1 = Q_{r\gamma}(\Omega^2, M), \quad \Psi_2 = Q_{r\gamma}(\Omega, M), \quad \beta = \text{const} > 1.$

Обозначим через $\tilde{H}(\Psi_1, \beta)$ множество интегральных операторов $Hx = \int\limits_\Omega h(t,\tau)x(\tau)d\tau$, у которых $h(t,\tau) \in Q_{r\gamma}(\Omega^2, M)$ и $\|(I + H)^{-1}\|_C \leq$
$\leq \beta$.

Теорема 8.1. При $X = C$

$$E_N(\Psi_1, \Psi_2, d) \geq A \begin{cases} N^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{при} \;\; v > l/(l-1); \\ N^{-s/l}(\ln N)^{s/l} & \text{при} \;\; v = l/(l-1); \\ N^{-s/l} & \text{при} \;\; v < l/(l-1), \end{cases} \tag{8.2}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения легко доказывается на классе интегральных уравнений вида

$$x(t) + \int\limits_\Omega h(\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad \int\limits_\Omega h(\tau)d\tau \neq -1.$$

Это уравнение имеет решение

$$x(t) = f(t) - \alpha, \quad \alpha = (\int\limits_\Omega h(\tau)f(\tau)d\tau)/(1 + \int\limits_\Omega h(\tau)d\tau),$$

причем $x(t) \in \Psi_2$. В гл. I было показано, что для поперечника Бабенко справедлива оценка

$$\delta_N(Q_{r\gamma}(\Omega, M)) \geq C \begin{cases} N^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{при} \;\; v > l/(l-1); \\ N^{-s/l}(\ln N)^{s/l} & \text{при} \;\; v = l/(l-1); \\ N^{-s/l} & \text{при} \;\; v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Следовательно, при любом способе задания информационного оператора $(\gamma_1(H), \ldots, \gamma_{N_1}(H), \gamma_{N_1+1}(f), \ldots, \gamma_N(f))$ справедлива оценка (8.2).

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения.

Теорема 8.2. Пусть $X = C, \quad \Psi_3 = B_{r\gamma}(\Omega^2)$, $\Psi_4 = B_{r\gamma}(\Omega)$, $\Omega =$ $=[-1,1]^l, l \geq 2$. Справедлива оценка $E_N(\Psi_3, \Psi_4, d) \geq CN^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}$.

Обозначим через Ψ_5 множество ядер $h(t,\tau)$, удовлетворяющих неравенству (4.2), а через Ψ_6- множество функций, принадлежащих классу $C^{m,v}(\Omega)$.

Теорема 8.3. При $X = C$

$$E_N(\Psi_5, \Psi_6, d) \geq C \begin{cases} N^{-r/(l-1)} & \text{при} \;\; q > l/(l-1); \\ N^{-m/l} & \text{при} \;\; q < l/(l-1); \\ N^{-m/l}(\ln N)^{m/l} & \text{при} \;\; q = l/(l-1), \end{cases}$$

где $r = l - v, \quad q = m/r$.

Построим приближенные методы решения уравнений вида (8.1), реализующие оценки теорем $8.1 - 8.3$ на соответствующих классах функций.

Для определенности остановимся вначале на случае, когда $h(t,\tau) \in$
$\in Q_{r\gamma}(\Omega^2, M)$, $f(t) \in Q_{r\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$. Покроем область Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ так, как это описано в разделе 2 § 3. Обозначим через $P_{s\cdots s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ функцию

$$P_{s\cdots s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) = \begin{cases} \sum\limits_{k_1=0}^{s} \cdots \sum\limits_{k_l=0}^{s} \alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) t_1^{k_1} \cdots t_l^{k_l} & \\ \qquad \text{при} & t \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \\ 0 \text{ при} & t \in \Omega \setminus \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \end{cases}$$

где $\sum\limits_{k_1=0}^{s} \cdots \sum\limits_{k_l=0}^{s} \alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) t_1^{k_1} \cdots t_l^{k_l}$ - полином, приближающий функцию $f(t)$ в кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Объединение функций $P_{s\cdots s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ является локальным сплайном $S_{s,\cdots,s}(f)$, определенным в области Ω. Обозначим через $S^t_{s,\cdots,s}$ оператор, ставящий функции $f(t)$ в соответствие локальный сплайн
$S_{s,\cdots,s}(f)$. Верхний индекс t означает, что оператор $S^t_{s,\cdots,s}$ берется по переменной t. Отметим, что способ определения полинома $P_{s,\cdots,s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, существенной роли не играет. В качестве этого полинома может быть взят отрезок ряда Тейлора, интерполяционный полином, отрезок ряда по ортогональным полиномам и т.д. Ниже для определенности в качестве полиномов $P_{s,\cdots,s}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, $k =$
$= 0, 1, \ldots, N-1$, берутся интерполяционные полиномы по узлам полиномов Чебышева или Лежандра.

В качестве приближенного к уравнению (8.1) возьмем уравнение

$$K_s x \equiv x(t) + H_s x \equiv x(t) + \int\limits_{\Omega} S^t_{s,\cdots,s}[h(t,\tau)] x(\tau) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} S^\tau_{s,\cdots,s}[h(t,\tau)] x(\tau) d\tau - \int\limits_{\Omega} S^t_{s,\cdots,s} S^\tau_{s,\cdots,s}[h(t,\tau)] x(\tau) d\tau = f(t). \quad (8.3)$$

Точное решение уравнения (8.3) является приближенным решением уравнения (8.1).

Рассмотрим уравнения (8.1) и (8.3) в пространстве $X = C$. Из теоремы Банаха следует, что при достаточно больших N (таких, что $q = A(sN)^{-s}\|K^{-1}\| < 1$) оператор K_s непрерывно обратим и справедлива оценка $\|K_s^{-1}\| \leq \|K^{-1}\|/(1-q)$.

Обозначим через x^* и x_s^* решения уравнений (8.1) и (8.3).

Очевидно, $x^* - x_s^* + H_s(x^* - x_s^*) = (H_s - H)x^*$.

Из обратимости оператора K_s следует, что

$$\|x^* - x_s^*\| \leq \|K_s^{-1}\|\|(H-H_s)x^*\| \leq A\|\int\limits_\Omega [(I-S_s^t)(I-S_s^\tau)h(t,\tau)]x^*(\tau)d\tau\| \leq$$

$$\leq A \begin{cases} m^{-2(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ m^{-2s/l}, & v < l/(l-1), \\ m^{-2s/l}(\ln m)^{s/l}, & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $m = s^l m_0$, m_0 – общее число кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, покрывающих область Ω.

Общее число функционалов, используемых при построении вычислительной схемы (8.3), $n = O(m^2)$. Следовательно,

$$\|x^* - x_s^*\| \leq A \begin{cases} n^{-(s-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ n^{-s/l}(\ln n)^{s/l}, & v = l/(l-1). \end{cases}$$

Сравнивая эту оценку с оценкой теоремы 8.1, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 8.4. При $X = C$, $l \geq 2$

$$E_N(\Psi_1, \Psi_2, d) \asymp \begin{cases} N^{-(s-\gamma)/(l-1)} & \text{при } v > l/(l-1), \\ N^{-s/l}(\ln N)^{s/l} & \text{при } v = l/(l-1), \\ N^{-s/l} & \text{при } v < l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$.

Аналогичным образом доказываются следующие теоремы.

Теорема 8.5. При $X = C$, $l = 1$

$$E_N(\Psi_1, \Psi_2, d) \asymp N^{-s}.$$

Теорема 8.6. При $X = C$, $l \geq 2$

$$E_N(\Psi_3, \Psi_4, d) \asymp N^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}.$$

9. Сверхсходимость решений интегральных уравнений

Начиная с середины XX в. активно развиваются итерационно-про-
екционные методы решения функциональных и, в частности, интегральных уравнений. Среди этих методов необходимо, в первую

очередь, отметить метод функциональных поправок Соколова и его различные модификации. Подробно с этими методами можно познакомиться по монографиям [107], [116]. Позднее выделился в отдельное направление один итерационно-проекционный метод, обладающий чрезвычайно высокой сходимостью.

Изложим этот метод на примере операторного уравнения второго рода

$$Kx \equiv x = Hx + f,\ K \in B[X, X], \tag{9.1}$$

где K – линейный оператор в банаховом пространстве X.

Пусть X_N – подпространство пространства X и $P_N \in [X, X_N]$ – проектор, отображающий X на X_N.

Для приближенного решения уравнения (9.1) используем проекционный метод

$$K_N x_N \equiv x_N = P_N H x_N + f_N,\ K_N \in B[X_N, X_N],\ \ f_N = P_N f. \tag{9.2}$$

Предположим, что уравнения (9.2) однозначно разрешимы, начиная с некоторого номера N_* , и что справедлива оценка $\|K_N^{-1}\| \leq M$.

Пусть x_N– решение уравнения (9.2). Введем поправку

$$\tilde{x}_N = Hx_N + f. \tag{9.3}$$

Итерационно-проекционный метод, описываемый уравнениями (9.2), (9.3), называется сверхсходящимся. Проведем выкладки, оправдывающие это название. Покажем [55], что решение $\tilde{x}_N$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{x}_N - HP_N\tilde{x}_N = f. \tag{9.4}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_N - HP_N\tilde{x}_N &= Hx_N + f - HP_N(Hx_N + f) = \\ &= H(x_N - P_N H x_N - P_N f) + f = f.\end{aligned} \tag{9.5}$$

Из (9.1) и (9.4) имеем

$$(I - HP_N)\tilde{x}_N = x - Hx,$$

$$(I - HP_N)\tilde{x}_N - x + HP_N x = HP_N x - Hx.$$

Используя равенство $P_N^2 = P_N$, получаем:

$$(I - HP_N)(\tilde{x}_N - x) = HP_N x - Hx - HP_N^2 x + HP_N x,$$

$$(I - HP_N)(\tilde{x}_N - x) = (HP_N - H)(x - P_N x).$$

Отсюда, предполагая, что оператор $I - HP_N$ непрерывно обратим, имеем:

$$(\tilde{x}_N - x) = (I - HP_N)^{-1}(HP_N - H)(x - P_N x)$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{x}_N - x\| \leq \|(I - HP_N)^{-1}\| \cdot \|(HP_N - H)(x - P_N x)\|. \qquad (9.6)$$

Из неравенства (9.6) следует, что близость точного решения x^* уравнения (9.1) и приближенного $\tilde{x}^*_N$, полученного по методу сверхсходимости (9.2) − (9.3), зависит от точности аппроксимации оператора H операторами HP_N на множестве функций, представимых в виде $z = x - P_N x, \quad x \in X$, и от нормы $\|x^* - P_N x^*\|$.

Точность проекционного метода (9.2) равна $A\|x^* - P_N x^*\|$. Следовательно, дополнительная точность метода сверхсходимости зависит от $\|HP_N - H\|$ на множестве $Z = \{x - P_N x\}, x \in X$.

Рассмотрим многомерные интегральные уравнения Фредгольма на классах функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$, $B_{r\gamma}(\Omega)$ и многомерные слабосингулярные интегральные уравнения. Для приближенного решения этих уравнений воспользуемся модификацией метода моментов, которую подробно изложим в случае уравнений на классе функций $Q_{r\gamma}(\Omega, M)$. Для простоты дальнейших выкладок предположим, что $\gamma-$ целое число.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Kx \equiv x + Hx \equiv x(t) + \int \cdots \int\limits_{\Omega} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \qquad (9.7)$$

где $\Omega = [-1,1]^l$, $t = (t_1, \dots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$, $h(t,\tau) \in Q_{r\gamma}(\Omega^2, M)$, $f(t) \in Q_{r\gamma}(\Omega, M)$.

Разобьем область Ω на более мелкие кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ по алгоритму, описанному в § 3 . При этом полагаем $v = (2s+2l)/(2s+2l-2\gamma)$. Приближенное решение уравнения (9.7) будем искать в виде кусочно-непрерывной функции $x_N(t)$, которая определяется формулой

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i_1,\cdots,i_l} x_N(t, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l}). \qquad (9.8)$$

Функция $x_N(t, \Delta^k_{i_1,\dots,i_l})$ равна нулю в дополнении куба $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}$ до области Ω, а в области $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}$ она определяется формулой

$$x_N(t, \Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}) = \sum_{j_1=0}^{s} \cdots \sum_{j_l=0}^{s} x_{j_1,\cdots,j_l}(\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}) P_{j_1,\cdots,j_l}(t, \Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}). \qquad (9.9)$$

Здесь $x_{j_1,\cdots,j_l}(\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l})$ – подлежащие определению числовые коэффициенты, $P_{j_1,\cdots,j_l}(t,\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l})$ – образ полинома $P_{j_1,\cdots,j_l}(t,[-1,1]^l) = P_{j_1}(t_1)\times\cdots\times P_{j_l}(t_l)$ при отображении куба $[-1,1]^l$ на куб $\Delta^k_{i_1,\cdots,i_l}$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Через $P_j(t)$ обозначен ортонормальный полином степени j, определенный на сегменте $[-1,1]$.

Коэффициенты $x_{j_1,\cdots,j_l}$ определяются по модифицированному методу моментов, который в операторной форме имеет вид

$$K_N x_N \equiv x_N(t) + P_N[\int\limits_\Omega h(t,\tau)x_N(\tau)d\tau] = P_N[f(t)], \tag{9.10}$$

где P_N – оператор проектирования, ставящий каждой непрерывной функции $x(t)\in C$ кусочно-полиномиальную функцию, определяемую формулами (9.8) – (9.9).

Можно показать, что при достаточно больших N система уравнений (9.10) однозначно разрешима. Проведем итерацию (9.3) для уравнения (9.7). В данном случае она имеет вид

$$\tilde{x}_N(t) = \int\int\limits_\Omega h(t,\tau)x_N(\tau)d\tau + f(t), \tag{9.11}$$

где $x_N(t)$– решение уравнения (9.10).

Таким образом, оценка погрешности проекционно-итерационного метода (9.11) сводится к оценке в метрике пространства $C(\Omega)$ нормы выражения $\|(HP_N-H)(x-P_Nx)\|$ при $x\in Q_{r\gamma}(\Omega,M)$.

Будем оценивать эту норму при $r\geq 1$. В этом случае в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $x(t)$ разлагается в ряд по ортонормальным полиномам $P_{j_1,\cdots,j_l}(t,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$.

Оценка нормы $\|(HP_N-H)(x-P_Nx)\|$ сводится к оценке нормы

$$J^k_{i_1,\ldots,i_l} = \|\int\int\limits_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} h(t,\tau)(x(\tau)-P_Nx(\tau))d\tau\|_C.$$

Пусть $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l} = [a_1,b_1;\cdots;a_l,b_l]$. Сделаем замену переменных

$$\tau_i = a_i + \frac{w_i+1}{2}(b_i-a_i), \quad i=1,2,\ldots,l.$$

Тогда

$$J^k_{i_1,\ldots,i_l} = \|\int\int\limits_\Omega h^k_{i_1,\ldots,i_l}(t,w)(x^k_{i_1,\ldots,i_l}(w) - (P_N x^k_{i_1,\ldots,i_l})(w))\prod_{i=1}^l \frac{b_i-a_i}{2}dw\|_C.$$

Обозначения $h^k_{i_1,\ldots,i_l}(t,w)$, $x^k_{i_1,\ldots,i_l}(w)$ очевидны. Здесь $x^k_{i_1,\ldots,i_l}(w)$ – отображение функции $x(\tau)$ из куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ в куб Ω. В кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функция $x(\tau)$ имела производные до s порядка включительно, причем модуль s-й производной был ограничен константой $M/(\rho(x,\Gamma))^\gamma = M(N/k)^{v\gamma}$ при $x \in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $1 \le k \le N-1$. Модуль r - й производной ограничен константой M при $x \in \Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$. При отображении $x(\tau)$ в $x^k_{i_1,\ldots,i_l}(w)$ последняя функция имеет производные до s - го порядка в Ω, причем s-я производная ограничена константой $(h_k/2)^s M(N/k)^{v\gamma}$ при $1 \le k \le N-1$, а r -я производная ограничена константой $(h_0/2)^r M$ при $k=0$.

Функция $h^k_{i_1,\ldots,i_l}(t,w)$ имеет производные по переменной w до s-го порядка при $1 \le k \le N-1$ и до r-го порядка при $k=0$. Эти производные ограничены константой $(h_k/2)^s M(N/k)^{v\gamma}$ при $1 \le k \le$ $\le N-1$ или константой $(h_0/2)^r M$ при $k=0$.

Выражение

$$x^k_{i_1,\ldots,i_l}(w) - (P_N x^k_{i_1,\ldots,i_l})(w) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty}{}' \alpha_{k_1 \cdots k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) P_{k_1}(w_1) \cdots P_{k_l}(w_l),$$

где $\sum'$ означает суммирование по $k_1, \cdots, k_l$, не принадлежащим кубу $[0,s]^l$.

Заметим теперь, что

$$\left(\frac{2}{h_k}\right)^l J^k_{i_1,\ldots,i_l} \le$$

$$\le \| \int\int_{\Omega} h^k_{i_1,\ldots,i_l}(t,w) \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty}{}' \alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) P_{k_1}(w_1) \cdots P_{k_l}(w_l) dw \| =$$

$$= \| \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty}{}' \alpha_{k_1,\ldots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) \int\int_{\Omega} h^k_{i_1,\ldots,i_l}(t,w) P_{k_1}(w_1) \cdots P_{k_l}(w_l) dw \| =$$

$$= \| \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty}{}' \alpha_{k_1,\ldots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) h^\omega_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) \| \le$$

$$\le \left[\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty}{}' \alpha^2_{k_1,\ldots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})\right]^{1/2} \left[\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty}{}' (h^\omega_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}))^2\right]^{1/2}.$$

Здесь $h^\tau_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}) = \max_{t\in\Omega} |h^\tau_{k_1,\cdots,k_l}(t,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})|$, $h^\tau_{k_1,\cdots,k_l}(t,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})-$ коэффициенты разложения функции $h(t,\tau)$ (по переменной τ в области $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$) в ряд Фурье по ортогональной в $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ системе функций $P_{k_1}(\tau_1) \cdots P_{k_l}(\tau_l)$, $k_i = 0,1,\ldots,\infty$, $i=1,2,\ldots,l$.

В ряде случаев коэффициенты $\alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ и $h_{k_1\cdots,k_l}(t,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ можно легко оценить. Пусть разложение функций $x(t)$ и $h(t,\tau)$ в кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0,1,\ldots,l$, проводится по полиномам Чебышева первого рода.

Тогда для коэффициентов Фурье $\alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$ имеют место оценки: при $1 \le k \le N-1$

$$|\alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})| \le Ah_k^s\left(\frac{k}{N}\right)^{v\gamma}\frac{1}{k_1^{v_1}\ldots k_l^{v_l}},$$

при $k=0$ и γ — целом

$$|\alpha_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})| \le Ah_0^r\frac{1}{k_1^{v_1}\ldots k_l^{v_l}},$$

где $v_1+\ldots+v_l = s$.

Аналогичная оценка справедлива и для коэффициентов Фурье $h_{k_1,\ldots,k_l}(t,\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$.

В результате имеем

$$\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_l=0}^{\infty}{}'\alpha^2_{k_1,\cdots,k_l}(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})\right]^{1/2} \le$$

$$\le Ah_k^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}\left[\sum_{(k_1,\ldots,k_l)\notin\Delta_*}^{\infty}\frac{1}{k_1^{2v_1}\ldots k_l^{2v_l}}\right]^{1/2} \le Ah_k^s\left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma}$$

при $k=1,\ldots,N-1$, где Δ_*— множество точек с целочисленными координатами, расположенных в кубе $[0,s]^l$.

При $k=0$

$$\left[\sum_{(k_1,\ldots,k_l)\notin\Delta_*}^{\infty}\alpha^2_{k_1\cdots k_l}(\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l})\right]^{1/2} \le Ah_0^r.$$

Аналогично,

$$J^k_{i_1,\cdots,i_l} \le Ah_k^{2s+l}\left(\frac{N}{k}\right)^{2v\gamma}$$

при $k=1,\ldots,N-1$.

При $k=0$

$$J^0_{i_1,\ldots,i_l} \le Ah_0^{2r+l}.$$

Поэтому

$$\|(HP_N-H)x\| \le AnN^{-(2s+l)}\|x\| \qquad (9.12)$$

где n – число кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, покрывающих область Ω.

Величина n была ранее оценена в § 3 соотношением (3.10). Из неравенства (9.12) и соотношения (3.10) следует, что

$$\|x^* - \tilde{x}_N\| \leq A \begin{cases} n^{-(2s+1-2\gamma)/(l-1)} & \text{при} \quad v > l/(l-1), \\ n^{-(2s+l)/l} & \text{при} \quad v < l/(l-1), \\ n^{-(2s+l)/l}(\ln n)^{(2s+l)/l} & \text{при} \quad v = l/(l-1). \end{cases}$$

Из сопоставления этого неравенства с оценкой, полученной в $ 3, с очевидностью следует сверхсходимость исследуемого метода. Очевидно, что эффект сверхсходимости будет значительно более высоким, если использовать в качестве приближенного решения отрезки ряда Фурье с коэффициентами, принадлежащими гиперболическим крестам.

10. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра

10.1. Одномерные интегральные уравнения Вольтерра

Рассмотрим интегральное уравнение

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in \Omega = [0,T], \quad (10.1)$$

где $h(t,\tau) \in W^{s,s}(M)$, $f(t) \in W^s(M)$, $g(t) \in Q^*_{r,\gamma}([0,T],M)$.

Повторяя практически дословно рассуждения, проведенные в § 1 книги [57], можно показать, что оператор K отображает пространство $Q^*_{r,\gamma}([0,T],M)$ на пространство $Q^*_{r,\gamma}([0,T],M_1)$. Следовательно, если $f \in Q^*_{r,\gamma}([0,T],M_1)$, то и $x \in Q^*_{r,\gamma}([0,T],M)$.

Таким образом, будем искать решение в классе функций, имеющих непрерывные производные до r-го порядка включительно и производные v-го порядка $(r < v \leq s)$, удовлетворяющие неравенству $|x^{(v)}(t)| \leq \frac{M}{t^{v-r-\zeta}}$, $v = r+1,\dots,s$.

Приближенное решение уравнения (10.1) будем искать в виде сплайна $x_n(t)$, $0 \leq t \leq T$ с неизвестными коэффициентами x^k_j, $k = 1,2,\dots,N$,
$j = 0,1,\dots,s$, построение которого описано гл. I. Опишем процесс определения этих коэффициентов.

Вначале проведем обоснование метода коллокации. Для этого введем функцию $K(t,\tau) = 1$, при $0 \leq \tau \leq t$, $K(t,\tau) = 0$, при $t < \tau \leq T$.

Тогда уравнение (10.1) можно представить в виде

$$Kx \equiv x(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau)h(t,\tau)g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t).$$

Нетрудно видеть, что оператор $K \in B[X,X]$, $X = C[0,T]$, непрерывно обратим. Из общей теории приближенных методов следует, что, начиная с некоторого номера n_0, операторы

$$K_n x_n \equiv P_n\left[x_n(t) + \int\limits_0^T K(t,\tau)P_n^\tau[h(t,\tau)]g(t-\tau)x_n(\tau)d\tau\right] = P_n[f(t)] \tag{10.2}$$

непрерывно обратимы в подпространстве X_n, состоящем из сплайнов вида $x_n(t)$, причем $\|K_n^{-1}\| \le B$ для всех $n \ge n_0$. Здесь $P_n[f]-$ оператор проектирования функции f из X на множество сплайнов $f_n(t)$. Обоснование этого утверждения не приводится, так как в главе III проведено подобное обоснование для более сложного случая сингулярных интегральных уравнений.

Обозначим через x^* и x_n^* решения уравнений (10.1) и (10.2) соответственно. Пусть $\tilde{x}_n^*-$ наилучшее приближение функции x^* сплайнами из X_n. Тогда

$$K_n(\tilde{x}_n^* - x_n^*) =$$

$$= P_n\left[(\tilde{x}_n^*(t) - x_n^*(t)) + \int\limits_0^T K(t,\tau)h(t,\tau)g(t-\tau)[\tilde{x}_n^*(\tau) - x^*(\tau)]d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T K(t,\tau)(h(t,\tau) - P_n^\tau[h(t,\tau)])g(t-\tau)x_n^*(\tau)d\tau\right].$$

Следовательно, $\|\tilde{x}_n^* - x_n^*\| \le An^{-s}$.

Так как $\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \le An^{-s}$, то окончательно имеем $\|x^* - x_n^*\| \le An^{-s}$.

Теорема 10.1 [53]. Пусть выполнены следующие условия:
1) $h(t,\tau) \in W^{s,s}(M)$, $g(t)$, $f(t) \in Q_{r,\gamma}^*([0,T],M)$;
2) оператор $K \in [C,C]$ непрерывно обратим.
Тогда начиная с некоторого номера n_0 операторы K_n $(n \ge n_0)$ непрерывно обратимы и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \le An^{-s}$, где x^* и x_n^*- решения уравнений (10.1) и (10.2) соответственно.

Из сопоставления утверждений теоремы 10.1 и теоремы 3.2 следует

Теорема 10.2 [53]. Среди всевозможных приближенных методов решения уравнения (10.1), использующих n функционалов функции $f(t)$ и n^2 функционалов функции $h(t,\tau)$, оптимальным по порядку по точности на классах функций

$$F\ (f,g \in F = Q^*_{r,\gamma}([0,T],M)) \ \text{ и } H\ (h \in H = Q^*_{r,\gamma}([0,T]^2,M))$$

является проекционный метод (10.2).

Пусть теперь функция $g(t) \in B^*_{r,\gamma}([0,T])$. В предположении, что оператор K отображает класс функций $B^*_{r,\gamma}(\Omega)$ в себя, утверждения предыдущей теоремы можно усилить. Введем узлы $t_0 = 0, \ t_k = 2^{k-n}T, \ k = 1,2,\dots,n$. Через Δ_k обозначим сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}], \ k =$
$= 0,1,\dots,n-1$. Локальный сплайн $f_n(t)$, аппроксимирующий функцию $f(t)$, строится следующим образом. На каждом сегменте $\Delta_k, \ k =$
$= 0,1,\dots,n-1$, функция $f(t)$ аппроксимируется интерполяционным полиномом степени r по узлам ξ^k_j, которые являются образами узлов полинома Лежандра $r+1$ степени $\xi_j, j = 1,2,\dots,r+1$, отображенными с сегмента $[-1,1]$ на сегмент $\Delta_k, \ k = 0,1,\dots,n-1$. Из теоремы 4.6 следует, что $\|f(t) - f_n(t)\| \le A2^{-n(r+1-\gamma)}$. Еще раз повторяя выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 10.1, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 10.3 [53]. Пусть $\Omega = [0,T]$ и выполнены следующие условия: 1) $h(t,\tau) \in A([0,T]^2), \ g(t),f(t) \in B^*_{r,\gamma}(\Omega)$. 2) оператор $K \in [C,C]$ непрерывно обратим; 3) оператор K отображает класс функций $B^*_{r,\gamma}(\Omega)$ в себя.
Тогда начиная с некоторого номера n_0 операторы K_n $(n \ge n_0)$ непрерывно обратимы и справедлива оценка $\|x^* - x^*_n\| \le A2^{-n(r+1-\gamma)}$, где x^* и x^*_n решения уравнений (10.1) и (10.2) соответственно.

Из сопоставления утверждений теоремы 4.6 главы I и теоремы 10.3 следует

Теорема 10.4 [53]. Среди всевозможных приближенных методов решения уравнения (10.1), использующих n функционалов функции $f(t)$ и n^2 функционалов функции $h(t,\tau)$ оптимальным по порядку по точности на классах функций F $(f,g \in F = B^*_{r,\gamma}([0,T]))$ и H $(h \in$
$\in H = A([0,T]^2))$ является проекционный метод (10.2).

10.2. Приближенное решение многомерных слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра

В этом пункте будем рассматривать интегральные уравнения вида

$$Kx \equiv x(t_1,\dots,t_l)+$$

$$+\int\limits_0^{t_l}\cdots\int\limits_0^{t_1} h(t_1,\ldots,t_l,\tau_1,\ldots,\tau_l)g(t_1-\tau_1,\ldots,t_l-\tau_l)x(\tau_1,\ldots,\tau_l)d\tau_1\cdots d\tau_l =$$

$$= f(t_1,\ldots,t_l), \qquad (10.3)$$

где $0 \le t_1,\ldots,t_l \le T$, $h(t_1,\ldots,t_l,\tau_1,\ldots,\tau_l)$ и $f(t_1,\ldots,t_l)$ – функции, имеющие частные производные до s-го порядка, слабосингулярные ядра $g(t_1-\tau_1,\ldots,t_l-\tau_l)$ могут иметь вид

$$g(t_1,\ldots,t_l) = t_1^{r_1+\alpha_1}\cdots t_l^{r_l+\alpha_l} \qquad (10.4)$$

или вид

$$g(t_1,\ldots,t_l) = (t_1^2+\cdots+t_l^2)^{r+\alpha}. \qquad (10.5)$$

Для простоты изложения полагаем $r_i = r$ и $\alpha_i = \alpha$, $i = 1,2,\ldots,l$.

Остановимся вначале на гладкости решений уравнений вида (10.3) с ядрами (10.4) и (10.5). Повторяя рассуждения, проведенные в [56], можно показать, что если ядро g имеет вид (10.4) и $f \in Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)$, то решение $x(t_1,\ldots,t_l)$ уравнения (10.3) принадлежит классу функций $Q^*_{r,\gamma}(\Omega,M)$ с $\gamma = s-r-\alpha$. В случае, когда ядро g имеет вид (10.5) и $f \in Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)$, решение $x(t_1,\ldots,t_l)$ уравнения (10.3) принадлежит классу функций $Q^{**}_{r,\gamma}(\Omega,M)$ с $\gamma = s-r-\alpha$.

Приступим теперь к построению и обоснованию вычислительной схемы приближенного решения уравнения (10.3). Так как вычислительные схемы строятся и обосновываются для ядер (10.4) и (10.5) одинаковым образом, то остановимся на случае уравнения (10.3) с ядром (10.4). Приближенное решение будем искать в виде сплайна $x^*_s(t_1,\ldots,t_l)$ с неизвестными значениями $x^*_s(\xi^k_{i_1},\ldots,\xi^k_{i_l})$, $(\xi^k_{i_1},\ldots,\xi^k_{i_l}) \in$
$\in \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, в узлах сетки, построение которого описано при доказательстве теоремы 4.3 в гл. I. Значения $x^*_s(\xi^k_{i_1},\ldots,\xi^k_{i_l})$

определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_N x_s^* \equiv P_s \left[x_s^*(t) + \int_0^{t_l} \cdots \int_0^{t_1} P_s^\tau [h(t,\tau)] g(t-\tau) x_s^*(\tau) d\tau \right] = P_s[f(t)]. \tag{10.6}$$

Здесь P_s – оператор проектирования на множество локальных сплайнов вида $x_s^*(t_1, \ldots, t_l)$. Обоснование вычислительной схемы (10.6) проводится так же, как в одномерном случае. Повторяя рассуждения, проведенные в пункте 10.1, убеждаемся, что начиная с достаточно больших n_0 ($N \geq n_0$), система уравнений (10.6) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|\tilde{x}^* - \tilde{x}_s^*\|_C \asymp m(n, v),$$

где $\tilde{x}^*$ и $\tilde{x}_s^*$– решения уравнений (10.3) и (10.6) соответственно, числовая функция $m(n, v)$ введена в теореме 4.3 гл. I.

Следовательно, учитывая теорему 4.3 гл. I, приходим к следующему утверждению

Теорема 10.5 [53]. Среди всевозможных приближенных методов решения уравнения (10.3), использующих n функционалов функции $f(t_1, \ldots, t_l)$ и n^2 функционалов функции $h(t_1, \ldots, t_l; \tau_1, \ldots, \tau_l)$ оптимальным по порядку по точности на классах функций F ($f, g \in$
$\in F = Q_{r,\gamma}^*([0,T]^l, M)$) и H ($h \in H = A([0,T]^{2l})$) является проекционный метод (10.6), имеющий точность $\|\tilde{x}^* - \tilde{x}_s^*\|_C \asymp m(n, v)$, где $\tilde{x}^*$ и $\tilde{x}_s^*$– решения уравнений (10.3) и (10.6), соответственно.

Теоремы для классов $Q_{r,\gamma}^{**}([0,T]^l, M)$, $B_{r,\gamma}^*([0,T]^l)$ и $B_{r,\gamma}^{**}([0,T]^l)$ доказываются подобным образом, на основе теорем 4.4 – 4.6 гл. I.

Предварительно введем класс функций $A(\Omega)$.

Определение 10.1. Пусть $\Omega = [0,T]^l$, $l = 1, 2, \ldots,$. Функция $f(t_1, \ldots, t_l)$ принадлежит классу $A(\Omega)$, если выполнены условия:

$$\left| \frac{\partial^{|v|} f(t_1, \ldots, t_l)}{\partial t_1^{v_1} \cdots \partial t_l^{v_l}} \right| \leq M^{|v|} |v|^{|v|}, \quad \text{при } 0 \leq |v| \leq \infty,$$

где константа M не зависит от $|v|$.

Теорема 10.6 [53]. Среди всевозможных приближенных методов решения уравнения (10.3), использующих n функционалов функции $f(t_1, \ldots, t_l)$ и n^2 функционалов функции $h(t_1, \ldots, t_l; \tau_1, \ldots, \tau_l)$ оптимальным по порядку по точности на классах функций

$$F_1 \ (f, g \in Q_{r,\gamma}^{**}([0,T]^l, M), \ h \in A([0,T]^{2l})),$$

$$F_2\ (f,g \in B^*_{r,\gamma}([0,T]^l),\ h \in A([0,T]^{2l})),$$

$$F_3\ (f,g \in B^{**}_{r,\gamma}([0,T]^l),\ h \in A([0,T]^{2l}))$$

является проекционный метод (10.6). При этом справедивы оценки точности нахождения приближенного решения

$$\|\tilde{x}^* - \tilde{x}^*_s\|_C \le A \begin{cases} n^{-s/l}, & \text{в случае класса } F_1; \\ n^{-(r+1-\gamma)/(l-1)}, & \text{в случае класса } F_2 \\ 2^{-\frac{n(r+1-\gamma)}{2^l-1}}, & \text{в случае класса } F_3 \end{cases}$$

где $\tilde{x}^*$ и $\tilde{x}^*_s$– решения уравнений (10.3) и (10.6) соответственно.

Замечание. В работе [166] построены алгоритмы решения многомерных интегральных уравнений Вольтерра на многопроцессорных компьютерах.

ГЛАВА III

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. О гладкости решений сингулярных интегральных уравнений

Рассматривается связь между гладкостью коэффициентов и правых частей сингулярных интегральных уравнений различных типов и гладкостью их решений. Результаты, приведенные в этом параграфе, ранее были опубликованы в работе автора [28].

1.1. Интегральные операторы на классах гладких функций

Лемма 1.1. Если $h(t,\tau) \in H_{\alpha\alpha}$, то оператор

$$Kx = \int_0^{2\pi} (h(t,\tau) - h(t,t)) \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \right|^\eta x(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le \eta < 1,$$

переводит каждую ограниченную функцию в функцию, принадлежащую классу H_α $(0 < \alpha \le 1)$.

Обозначим через Z класс функций, таких, что $|f(x+\delta) - f(x)| \le$ $\le A\delta |\ln|\delta||, \quad \delta > 0$.

Лемма 1.2. Пусть $x \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1), \quad 0 < \eta < 1$. Тогда функция $v(t)$, $v(t) = \int_0^{2\pi} x(\tau) \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^\eta d\tau$ принадлежит при $\alpha = \eta$ пространству Z, а при $\alpha \ne \eta-$ пространству H_γ, причем $\gamma = 1$ при $\alpha > \eta$ и $\gamma = \alpha + 1 - \eta$ при $\alpha < \eta$.

Лемма 1.3. Пусть интегральное уравнение

$$Hx \equiv x(t) + \int_0^{2\pi} h(t,\tau) \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \right|^\eta x(\tau)\, d\tau = f(t), \quad 0 \le \eta < 1,$$

где $h(t,\tau), f(t) \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, имеет единственное решение $x^*(t)$. Тогда $x^*(t) \in H_\alpha$.

Лемма 1.4. Пусть интегральное уравнение $Hx = f$, где $h(t,\tau) \in W^{r,r} H_{\alpha,\alpha}$, $f(t) \in W^r H_\alpha$, имеет единственное решение $x^*(t)$. Тогда $x^*(t) \in W^r H_\alpha$.

Доказательство леммы 1.1 проводится по аналогии с доказательством леммы 1.41 из монографии [121]. Пусть $|x(t)| \le A$.

Обозначим через $v(t)$ оператор $(Hx)(t)$. Тогда

$$|v(t+\delta) - v(t)| \le I_1 + I_2 + I_3 = \int_{r_1} |h(t+\delta,\tau) - h(t+\delta, t+\delta)| \times$$

$$\times \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} |x(\tau)|\, d\tau + \int\limits_{r_2} |h(t,\tau)-h(t,t)| \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} |x(\tau)|\, d\tau +$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta}\Big[(h(t+\delta,\tau)-h(t+\delta,t+\delta))\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} -\right.$$

$$\left. -(h(t,\tau)-h(t,t))\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta}\Big] x(\tau)\, d\tau\right|, \tag{1.1}$$

где $r_1 = |\tau-t-\delta| \le 3\delta$, $r_2 = |\tau - t| \le 3\delta$, $\Delta = 2\pi \setminus (r_1 \cap r_2)$.

Слагаемые I_1 и I_2 оцениваются одинаково

$$I_1 + I_2 \le A\delta^{1+\alpha-\eta}\|x\|_C. \tag{1.2}$$

Для оценки I_3 представим это выражение в виде

$$I_3 = I_4 + I_5 + I_6 = \left|\int\limits_{\Delta}(h(t+\delta,\tau)-h(t,\tau))\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} x(\tau)\, d\tau\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\Delta}(h(t+\delta,t+\delta)-h(t,t))\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} x(\tau)\, d\tau\right| + \left|\int\limits_{\Delta}(h(t+\delta,\tau)-\right.$$

$$\left. -h(t+\delta,t+\delta))\left(\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} - \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta}\right) x(\tau)\, d\tau\right|. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что

$$I_4 + I_5 \le A\delta^{\alpha}\|x\|_C. \tag{1.4}$$

Переходя к оценке третьего слагаемого, заметим, что

$$|h(t+\delta,\tau)-h(t+\delta,t+\delta)| \le A\min_k |\tau-t-\delta-2k\pi|^{\alpha} \quad (k=0,1). \tag{1.5}$$

На сегменте $\Delta_1 = [t+3\delta, t+\pi]$ справедливо неравенство

$$|\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} - \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta}| = \left|\left(\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right)^{\eta} - \left(\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right)^{\eta}\right| \le$$

$$\le \frac{\eta\delta 2^{-1}\,|\cos((\tau-t-\delta)/2)|^{\eta-1}}{\left|\sin^{1+\eta}((\tau-t-\delta)/2)\right|}. \tag{1.6}$$

На сегменте $\Delta_2 = [t+\pi, t+\pi+\delta]$ функции $\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}$ имеют разные знаки и поэтому

$$\left|\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} - \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta}\right| \le \left\{\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} + \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta}\right\}. \tag{1.7}$$

На сегменте $\Delta_3 = [t+\pi+\delta, t+2\pi-2\delta]$ оценка проводится аналогично (1.6).

Из неравенств (1.5) – (1.7) следует, что

$$I_6 \leq A\delta\|x\|_C \left\{ \int\limits_{\Delta_1} \frac{|\tau - t - \delta|^\alpha \, d\tau}{\cos^{1-\eta}((\tau-t-\delta)/2)\sin^{1+\eta}((\tau-t)/2)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta_2} |\tau - t - \delta|^\alpha \left(\left| \operatorname{ctg} \frac{\tau - t - \delta}{2} \right|^\eta + \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \right|^\eta \right) d\tau \right\} \leq A\delta^{\alpha+1-\eta}\|x\|_C. \tag{1.8}$$

Из оценок (1.1) – (1.4) и (1.8) следует, что

$$|v(t+\delta) - v(t)| \leq A_6\delta^\alpha \|x\|_C.$$

Доказательство леммы 1.2 повторяет доказательство предыдущей леммы. Очевидно,

$$|v(t+\delta) - v(t)| = \left| \int\limits_0^{2\pi} (x(\tau) - x(t)) \left[\left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t-\delta}{2} \right|^\eta - \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} \right|^\eta \right] d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_r |x(\tau) - x(t)| \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t-\delta}{2} \right|^\eta d\tau + \int\limits_r |x(\tau) - x(t)| \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} \right|^\eta d\tau +$$

$$+ \left| \int\limits_\Delta (x(\tau) - x(t)) \left[\left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t-\delta}{2} \right|^\eta - \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} \right|^\eta \right] d\tau \right| = J_1 + J_2 + J_3, \tag{1.9}$$

где $r = \{\tau : |\tau - t| \leq 4\delta\}$, $\Delta = [0, 2\pi] \setminus r$.

Нетрудно видеть, что

$$J_1 + J_2 \leq A_1\delta^{\alpha+1-\eta}. \tag{1.10}$$

Введем обозначения $\Delta_1 = [t+4\delta, t+\pi]$, $\Delta_2 = [t+\pi, t+2\pi-4\delta]$, $\Delta_3 = [t+\pi+\delta, t+2\pi-4\delta]$. Тогда

$$J_3 \leq \left| \int\limits_{\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3} (x(\tau) - x(t)) \left[\left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t-\delta}{2} \right|^\eta - \left| \operatorname{ctg} \frac{\tau-t}{2} \right|^\eta \right] d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{\Delta_1} (\cdot) d\tau \right| + \left| \int\limits_{\Delta_2} (\cdot) d\tau \right| + \left| \int\limits_{\Delta_3} (\cdot) d\tau \right| = J_4 + J_5 + J_6. \tag{1.11}$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности

$$J_4+J_6 \le A_2 \int\limits_{\Delta_1} |\tau-t|^{\alpha} \left|\operatorname{ctg}^{\eta}\frac{\tau-t-\delta}{2} - \operatorname{ctg}^{\eta}\frac{\tau-t}{2}\right| d\tau \le$$

$$\le A_3\delta \int\limits_{\Delta_1} |\tau-t|^{\alpha} \left|\cos^{1-\eta}\frac{\tau-t-\delta}{2}\sin^{1-\eta}\frac{\tau-t}{2}\right|^{-1} d\tau \le$$

$$\le \begin{cases} A\delta|\ln|\delta||, & \text{если} \quad \eta=\alpha, \\ A\delta^{\alpha+1-\eta}, & \text{если} \quad \alpha<\eta, \\ A\delta, & \text{если} \quad \alpha>\eta; \end{cases} \tag{1.12}$$

$$J_5 = \left|\int\limits_{\Delta_2} (x(\tau)-x(t))\left[\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t-\delta}{2}\right|^{\eta} + \left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta}\right] d\tau\right| \le A\delta^{\alpha+1-\eta}. \tag{1.13}$$

Из неравенств (1.9) – (1.13) следует справедливость леммы.

Доказательство леммы 1.3. Представим уравнение $Hx=f$ в виде

$$x(t)+\int\limits_0^{2\pi}(h(t,\tau)-h(t,t))\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} x(\tau)\,d\tau + h(t,t)\int\limits_0^{2\pi} x(\tau)\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} d\tau =$$

$$= f(t).$$

Из леммы 1.41 монографии [121] следует, что решение $x^*(t)$ уравнения $Hx=f$ принадлежит классу H_v, $v=\min(\alpha, 1-\eta)$. Если $\alpha > 1-\eta$, то лемма доказана. Предположим, что $\alpha \le 1-\eta$. Из леммы 1.1 следует, что оператор $\int\limits_0^{2\pi}(h(t,\tau)-h(t,t))\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} d\tau$ отображает класс функций H_v в Z. Повторяя рассуждения, сделанные при доказательстве леммы 1.2, убеждаемся в том, что оператор $\int\limits_0^{2\pi} x(\tau)\left|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\right|^{\eta} d\tau$ отображает класс функций H_v в Z при $\eta=1/2$ или в H_{v_1} при $\eta \ne 1/2$. Здесь $v_1=2(1-\eta)$, если $1-\eta<\eta$, и $v_1=1$, если $1-\eta>\eta$. Если окажется, что $v_1\ge\alpha$, то лемма доказана. В противном случае для завершения доказательства нужно повторить (возможно, несколько раз) предыдущие рассуждения, полагая уже, что $x\in H_{v_1}$.

Доказательство леммы 1.4. Лемма 1.4 является частным случаем доказываемой ниже теоремы 1.2.

1.2. О гладкости решений сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах

Рассмотрим сингулярные интегральные уравнения (с. и. у.)

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)\left(S_\gamma x\right)(t) + U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)\right) = f(t), \tag{1.14}$$

где

$$S_\gamma x = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \quad U_\gamma(hx) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad 0 \le \eta < 1.$$

Оператору K поставим в соответствие характеристический оператор $K^0 x = ax + bS_\gamma x$.

Исследование гладкости решений уравнений вида (1.14) будем проводить в банаховых пространствах H_β $(0 < \beta < 1)$ с нормой $\|x\|_{H_\beta} = M(x) + H(x;\beta) = \max_{t\in\gamma}|x(t)| + \sup_{t_1\ne t_2}(|x(t_1) - x(t_2)|/|t_1 - t_2|^\beta)$.

Теорема 1.1. Пусть $a, b, h, f \in H_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, уравнение (1.14) нормального типа, индекс оператора K^0 равен нулю, а оператор K непрерывно обратим в пространстве H_β $(0 < \beta \le \alpha)$. Тогда единственное решение $x^*(t)$ уравнения (1.14) принадлежит классу H_α.

Следствие. Если выполнены условия теоремы, то оператор K, действующий на H_α в H_α, непрерывно обратим.

Теорема 1.2. Пусть $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in W^r H_\alpha$, $h(t,\tau) \in W^{r,r}H_{\alpha,\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$, уравнение (1.14) нормального типа, индекс оператора K^0 равен нулю и оператор K непрерывно обратим в пространстве H_β $(0 < \beta \le \alpha)$. Тогда решение $x^*(t)$ уравнения (1.14) принадлежит пространству $W^r H_\alpha$.

Доказательство теоремы 1.1. Известно [121], что при сделанных предположениях оператор K^0 является линейным оператором, действующим из H_β в H_β при любых β $(0 < \beta \le \alpha)$ и при всех указанных значениях β оператор K^0 непрерывно обратим. Покажем, что $\left\|\left(K^0\right)^{-1}\right\|_{H_\beta} \le A$ при $0 < \beta_1 < \beta \le \alpha$, где A – константа, не зависящая от β. В монографии [125] показано, что

$$\left(K^0\right)^{-1} f = a(t)f(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)},$$

где

$$Z(t) = \Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \ln\left[\frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right]\frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Известно, что $\|Sf\|_{H_\beta} \leq A\|f\|_{H_\beta}$ и $\|a(t)f(t)\|_{H_\beta} \leq \|a(t)\|_{H_\beta}\|x(t)\|_{H_\beta}$. Поэтому $\left\|\left(K^0\right)^{-1}\right\| \leq A$.

Уравнение (1.14) можно представить в виде

$$x(t) = \left(K^0\right)^{-1} f(t) - \left(K^0\right)^{-1} U_\gamma \left(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)\right).$$

Учитывая свойства оператора $\left(K^0\right)^{-1}$ и повторяя рассуждения леммы 1.3, убеждаемся в справедливости включения $x^*(t) \in H_\alpha$.

Доказательство следствия. Так как оператор $K \in [H_\beta, H_\beta]$ непрерывно обратим, то каждой функции $f \in H_\beta$ ставится в соответствие единственное в пространстве H_β решение уравнения (1.14). Это решение будет единственным и в пространстве H_α. Линейный оператор K взаимно однозначно отображает H_α на H_α, и, следовательно, по теореме Банаха он непрерывно обратим.

Доказательство теоремы 1.2. Вначале докажем теорему при $r = 1$. Для простоты перейдем к с. и. у. с ядром Гильберта

$$a(s)x^*(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\right|^\eta x^*(\sigma)\,d\sigma = \\ = f(s), \tag{1.15}$$

которое можно представить в виде

$$Fx^* = a(s)x^*(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^*(\sigma + s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma + \\ + \int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma + s)\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\right|^\eta x^*(\sigma + s)\,d\sigma = f(s).$$

Пусть h $(h > 0)$ — произвольное вещественное число. Тогда, введя обозначение $x_h^*(s) = \left(x^*(s+h) - x^*(s)\right)/h$, перепишем тождество:

$$h^{-1}((Fx^*)(s+h) - (Fx^*)(s)) = h^{-1}(f(s+h) - f(s)),$$

в виде

$$a(s)x_h^*(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x_h^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\right|^\eta x_h^*(\sigma)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{h}\Bigg\{(f(s+h) - f(s)) - (a(s+h) - a(s))x^*(s+h) -$$

$$-(b(s+h)-b(s))\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^*(\sigma+h)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma-$$

$$\left.-\int\limits_0^{2\pi}(h(s+h,\sigma+s+h)-h(s,\sigma+s))\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\right|^\eta x^*(\sigma+s+h)\,d\sigma\right\}. \tag{1.16}$$

Обозначим правую часть равенства (1.16) через φ_h и покажем, что при $h\to 0$ последовательность функций φ_h в метрике пространства H_β $(0<\beta<\alpha)$ сходится к функции

$$\varphi(s)=f'(s)-a'(s)x^*(s)-\frac{b'(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^*(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma-$$

$$-\int\limits_0^{2\pi}(h'_s(s,\sigma)+h'_\sigma(s,\sigma))\left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right|^\eta x^*(\sigma)\,d\sigma.$$

При этом достаточно ограничиться доказательством справедливости соотношения $\lim\limits_{h\to 0}\|h^{-1}(f(s+h)-f(s))-f'(s)\|_{H_\beta}=0$. Нетрудно видеть, что $|(f(s+h)-f(s))/h-f'(s)|\le Ah^\alpha/(1+\alpha)$.

Для оценки $H\left(h^{-1}(f(s+h)-f(s))-f'(s);\beta\right)$ введем произвольное δ $(\delta>0)$ и рассмотрим две возможности: 1) $h\le\delta$ и 2) $h>\delta$.

Простые выкладки приводят к неравенству

$$J=\left|\frac{f(s+h+\delta)-f(s+\delta)}{h}-f'(s+\delta)-\left[\frac{f(s+h)-f(s)}{h}-f'(s)\right]\right|=$$

$$=\left|h^{-1}\int\limits_{s+\delta}^{s+\delta+h}(f'(v)-f'(s+\delta))\,dv-h^{-1}\int\limits_{s+\delta}^{s+\delta+h}(f'(v-\delta)-f'(s))\,dv\right|\le$$

$$\le\left|h^{-1}\int\limits_{s+\delta}^{s+\delta+h}(f'(v)-f'(s+\delta)-f'(v-\delta)+f'(s))\,dv\right|.$$

В первом случае

$$J=2Ah^{-1}\int\limits_{s+\delta}^{s+\delta+h}|v-s-\delta|^\alpha\,dv=2Ah^\alpha(1+\alpha)^{-1}\le 2A\delta^\beta h^{\alpha-\beta}/(1+\alpha),$$

а во втором

$$J\le 2Ah^{-1}\int\limits_{s+\delta}^{s+\delta+h}\delta^\alpha\,dv=2A\delta^\alpha\le 2A\delta^\beta h^{\alpha-\beta}.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\lim_{h\to 0}\|h^{-1}(f(s+h)-f(s))-f'(s)\|_{H_\beta}=0.$$

Аналогичным образом доказывается, что $\lim\limits_{h\to 0}\|\varphi_h-\varphi\|=0$.

Так как $f\in W^1H_\alpha$, то при всех значениях h ($h\neq 0$) $f_h\in H_\alpha$. Из теоремы 1.1 следует, что $x^*\in H_\alpha$. Поэтому можно сделать вывод о принадлежности функции φ_h пространству H_α. Из условий теоремы следует, что и функция $\varphi\in H_\alpha$.

Зафиксируем произвольное значение β ($0<\beta<\alpha$). Так как оператор F непрерывно обратим в пространстве H_β, то уравнение (1.16) однозначно разрешимо при любом $h\neq 0$ и, следовательно, $x_h^*\in H_\beta$. Так как φ_h сильно сходится к функции φ по метрике пространства H_β, то x_h^* сильно сходится к решению $x^{*\prime}$ уравнения $Kx=\varphi$, которое принадлежит H_α. Таким образом, справедливо соотношение $\lim\limits_{h\to 0}\|x_h^*-x^{*\prime}\|_{H_\beta}=0$, которое доказывает, что функция $x^{*\prime}$ является производной решения x^* уравнения $Kx=f$. Так как $x^{*\prime}\in H_\alpha$, то доказательство теоремы при $r=1$ завершено.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $r\geq 2$. Доказательство проведем по индукции. Продифференцируем выражение (1.15) по s и представим результат в виде

$$a(s)x^{*\prime}(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x_s^{*\prime}(\sigma+s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}d\sigma+\int\limits_0^{2\pi}h(s,\sigma+s)|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}|^\eta x_s^{*\prime}(\sigma+s)\,d\sigma=$$
$$=F(s),\tag{1.17}$$

где

$$F(s)=f'(s)-a'(s)x^*(s)-\frac{b'(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^*(\sigma+s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}d\sigma-$$
$$-\int\limits_0^{2\pi}[h_1'(s,\sigma+s)+h_2'(s,\sigma+s)]\,|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}|^\eta x^*(\sigma+s)\,d\sigma,$$

$h_i'(s,\sigma+s)$ – производная по i-й переменной ($i=1,2$) функции $h(u_1,u_2)$.

Воздействуем на обе части равенства (1.17) оператором Δ_h, определяемым по формуле $\Delta_h f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Так как $\Delta_h[f(x)g(x)]=$ $=\Delta f(x)g(x+h)+f(x)\Delta g(x)$, то выражение (1.17) после воздействия на него оператором Δ_h примет вид

$$a(s)\Delta_h x^{*\prime}(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Delta_{h_s}x_s^{*\prime}(\sigma+s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma+s)|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}|^{\eta}\Delta_{h_s} x_s^{*\prime}(\sigma+s)\,d\sigma = G_h(s), \tag{1.18}$$

где

$$G_h(s) = \Delta_h F(s) - (\Delta_h a(s)) x^{*\prime}(s+h) + \frac{\Delta_h b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x_s^{*\prime}(\sigma+s+h)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma -$$

$$-\int\limits_0^{2\pi}(\Delta_h h(s,\sigma+s))|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}|^{\eta} x_s^{*\prime}(\sigma+s+h)\,d\sigma.$$

Так как $a,b \in W^2 H_\alpha$, $h(s,\sigma) \in W^{2,2}H_{\alpha,\alpha}$ и $x^{*\prime} \in H_\alpha$, то функция $G_h(s)$ принадлежит пространству H_α и сходится по норме пространства H_β $(0<\beta<\alpha)$ к функции

$$G(s) = F'(s) - a'(s)x^{*\prime}(s) - \frac{b'(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^{*\prime}(\sigma+s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma -$$

$$-\int\limits_0^{2\pi}(h_1'(s,\sigma+s)+h_2'(s,\sigma+s))|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}|^{\eta} x_s^{*\prime}(\sigma+s)\,d\sigma.$$

Из условий теоремы следует, что уравнение (1.18) однозначно разрешимо и $\Delta_h x^{*\prime}(s) \in H_\beta$ $(0<\beta\leq\alpha)$. Рассмотрим уравнение

$$a(s)z(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} z(\sigma+s)\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma + \int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma+s)|\mathrm{ctg}\frac{\sigma}{2}|^{\eta} z(\sigma+s)\,d\sigma = G(s).$$

Так как оператор K непрерывно обратим в пространстве H_α, то $z \in H_\alpha$. Зафиксируем теперь произвольное β $(0<\beta<\alpha)$. В пространстве H_β оператор K непрерывно обратим и $G_h(s)$ сильно сходится к $G(s)$. Поэтому в этом пространстве $\Delta_h x^{*\prime}(s)$ сильно сходится к функции $z(s) \in H_\alpha$. Следовательно, функция $x^*(s)$, являющаяся решением уравнения (1.14), имеет вторую производную, принадлежащую классу H_α. В случае $r=2$ теорема доказана. Аналогичным образом доказывается справедливость теоремы при $r = 3, 4, \ldots$.

2. Приближенное решение линейных сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования (обоснование в пространствах Гельдера)

Исследуем приближенные методы решения с. и. у. следующих видов:

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)S_\gamma(x) + U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)\right) = f(t), \quad (2.1)$$

$$Lx \equiv a(t)x(t) + S_\gamma(h(t,\tau)x(\tau)) = f(t), \quad (2.2)$$

где функции $a, b, f \in H_\alpha$, $h \in H_{\alpha\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Здесь γ – единичная окружность с центром в начале координат; обозначения $S_\gamma x$, $U_\gamma(hx)$ приведены в § 1. Ниже используется функция

$$\psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\right\},$$

где $G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ в случае уравнения (2.1) и $G(t) = \frac{a(t)-h(t,t)}{a(t)+h(t,t)}$ в случае уравнения (2.2).

Обоснование вычислительных схем будем проводить в пространстве $X = H_\beta$, состоящем из функций, удовлетворяющих условию Гельдера H_β с нормой

$$\|x\| = M(x) + H(x,\beta) = \max|x(t)| + sup_{t_1\neq t_2}|xt_1 - xt_2|/|t_1 - t_2|^\beta,\ t, t_1, t_2 \in \gamma$$

и его подпространстве X_n, состоящем из полиномов вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k$. Через P_n обозначен оператор, отображающий пространство X на множество интерполяционных полиномов степени n по узлам $t_k = e^{is_k}$,
$s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Приближенное решение уравнения (2.1) ищем в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k, \quad (2.3)$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид

$$K_n x_n \equiv P_n[a(t)x_n(t) + b(t)S_\gamma(x_n) + U_\gamma\left(P_n^(\tau)[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)]\right)] =$$
$$= P_n[f(t)]. \quad (2.4)$$

Здесь

$$d(t,\tau) = \begin{cases} |\tau - t|^{-\eta}, & \text{если } |\sigma - s| \geq \frac{2\pi}{2n+1}, \\ |e^{i\frac{2\pi}{2n+1}} - 1|^{-\eta}, & \text{если } |\sigma - s| < \frac{2\pi}{2n+1}; \end{cases}$$

$\tau = e^{i\sigma},\ t = e^{is}$.

Теорема 2.1 [11], [17]. Пусть функции $a, b, f \in H_\alpha$, $h \in H_{\alpha\alpha}$, $(0 < \alpha \leq 1)$ и оператор K непрерывно обратим в пространстве Гельдера $X = H_\beta$ $(0 < \beta < \alpha)$. Тогда при n таких, что $q = An^{-\xi} \ln n < 1$
$(\xi = \min(\alpha - \beta, 1 - \eta - \beta, \beta))$, система уравнений (2.4) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| < An^{-\xi} \ln n$, где
x^* – решение уравнения (2.1).

Полученная в предыдущей теореме оценка погрешности зависит от константы η. Построим вычислительную схему, оценка погрешности которой зависит только от гладкости функций a, b, h, f. Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде полинома (2.3), коэффициенты которого определяются из системы уравнений, представимых в операторной форме выражением

$$K_n x_n \equiv P_n \left[a(t) x_n(t) + b(t) S_\gamma \left(x_n(\tau) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{2n} h(t, t_k) x_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau - t|^{-\eta} \, d\tau \right] = P_n[f(t)], \qquad (2.5)$$

где $t_k = e^{is_k}, s_k = 2k\pi/(2n+1), t'_k = e^{s'_k}, s'_k = (s_k + s_{k+1})/2, k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 2.2 [28]. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда среди всевозможных приближенных методов решения уравнения (2.1), использующих n значений функций a, b, f и n^2 значений функции h, оптимальным по порядку на классе H_α является метод, описываемый вычислительной схемой (2.3), (2.5). Погрешность этого метода равна $\|x^* - x_n^*\| = O(n^{-(\alpha-\beta)} \ln n)$, где x^* и x_n^* – решения уравнений (2.1) и (2.5), соответственно.

Предположим теперь, что коэффициенты и правая часть уравнения (2.1) удовлетворяют условиям $a(t), b(t), f(t) \in W^r$, $h(t, \tau) \in W^{r,r}$. Аппроксимируем функцию $G(t)$ сплайном $\tilde{G}_n(t)$ степени r дефекта 1 по равномерному разбиению $t_k = exp\{2k\pi/n\}$. Эти сплайны подробно описаны в книге [100].

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде полинома (2.3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_n^* x_n \equiv P_n[a(t) x_n(t) + b(t) S_\gamma(x(\tau)) + U_\gamma[S_n^\tau[h(t, \tau)] x_n(\tau) |\tau - t|^{-\eta}]] =$$
$$= P_n[f(t)], \qquad (2.6)$$

где $S_n^(\tau)[h(t,\tau)]$ – сплайн порядка r дефекта 1 по переменной τ и по равномерному разбиению, интерполирующий функцию $h(e^{is}, e^{i\sigma})$ в узлах $s_k + \left(1 + (-1)^{r+1}\right)\pi/2n, s_k = 2k\pi/n, k = 0, 1, \cdots, n$.

Теорема 2.3 [28]. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве X и $a, b, f \in W^r H_\alpha, h \in W^{r,r} H_{\alpha\alpha}, r = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 1$;
тогда среди всевозможных алгоритмов решения уравнения (2.1), использующих n значений функций a, b, f и n^2 значений функции h, оптимальной по порядку является вычислительная схема (2.3), (2.6). Погрешность этой вычислительной схемы равна $\|x^* - \tilde{x}_n^*\| \leq$ $\leq O(n^{-(r+\alpha-\beta)} \ln n)$, где x^* и $\tilde{x}_n^*$ – решения уравнений (2.3) и (2.6), соответственно.

Приближенное решение уравнения (2.2) ищется в виде полинома (2.3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$L_n x_n \equiv P_n[a(t)x_n(t) + S_\gamma\left(P_n^\tau[h(t,\tau)]x_n(\tau)\right)] = P_n[f(t)]. \qquad (2.7)$$

Теорема 2.4 [11], [17]. Пусть оператор L непрерывно обратим. Тогда при n таких, что $q = O\left(n^\beta \ln^2 n \left(E_n(\psi(t)) + E_n^t(h) + E_n^\tau(h)\right)\right) <$ < 1, система (2.7) имеет единственное решение x_n^* и справедливо неравенство $\|x^* - x_n^*\| \leq O(q + E_n(f))$, где x^* – решение уравнения (2.2), $\psi(t) = exp\{\Gamma(t)\}$,

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \ln\left[\frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right] \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Пусть приближенное решение уравнения (2.2) ищется в виде полинома (2.3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{L}_n x_n \equiv \overline{P}_n\left[a(t)x_n(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\gamma P_n^\tau\left[\frac{h(t,\tau)x_n(\tau)}{\tau - t}\right]d\tau\right] = \overline{P}_n[f(t)], \quad (2.8)$$

где $\overline{P}_n$– оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов степени n по узлам $t'_k = e^{s'_k}, s'_k = (s_k +$
$+s_{k+1})/2, k = 0, 1, \ldots, 2n, s_k = 2k\pi/(2n+1), k = 0, 1, \ldots, 2n+1$.

Теорема 2.5 [11], [17]. Пусть оператор L непрерывно обратим. Тогда при n таких, что $q = O\left((E_n(\psi(t)) + E_n^\tau(h))\ln^2 n\right) < 1$ система уравнений (2.8) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq O(q + E_n(f))$, где x^* – решение уравнения (2.2).

Построим оптимальные по порядку вычислительные схемы приближенного решения с. и. у. вида (2.2). Приближенное решение будем искать в виде полинома (2.3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$L_n^* x_n \equiv \overline{P}_n[a(t)x_n(t) + h(t,t)S_\gamma(x_n(\tau)) +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma P_n^\tau\left[\frac{h(t,\tau)-h(t,t)}{\tau - t}\right]x_n(\tau)d\tau\Bigg] = \overline{P}_n[f(t)]. \qquad (2.9)$$

Теорема 2.6 [28]. Пусть оператор L непрерывно обратим. Среди всевозможных алгоритмов приближенного решения с. и. у. вида (2.2), использующих n значений функций $a(t), f(t)$ и n^2 значений функции $h(t,\tau)$, оптимальной по порядку является вычислительная схема (2.3), (2.9) с погрешностью $\|x^* - x_n^*\| = O(E_n(\psi) + E_n^t(h) + E_n^\tau(h) + E_n(f))\ln n$, где x^* и x_n^* – решения уравнений (2.2) и (2.9).

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $a(t), b(t), f(t) \in H_\alpha$, $h(t,t) \in H_{\alpha\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\beta < \delta = min(\alpha, 1-\eta)$.

Поставим в соответствие каждой функции $z(t) \in H_\beta$ функции $z^+(t)$ и $z^-(t)$, аналитические внутри и вне γ соответственно, и связанные с $z(t)$ формулами Племеля – Сохоцкого: $z(t) = z^+(t) - z^-(t)$, $S(t) = z^+(t) + z^-(t)$.

Повторяя рассуждения, проведенные в [82], [64], можно показать, что уравнения (2.1) и (2.4) эквивалентны следующим:

$$K^{(1)}x \equiv Vx + Wx = y,$$

$$K_n^{(1)}x_n \equiv V_n x_n + W_n x_n = y_n,$$

где $Vx = \psi^- x^+ - \psi^+ x^-$, $Wx = lU_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau))$, $l = \psi^-/(a+b)$, $V_n x_n = P_n[Vx_n]$, $y_n = P_n[y]$, $y = lf$. $W_n x_n = P_n[lU_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x(\tau)])]$.

Для доказательства однозначной разрешимости системы уравнений $K_n^{(1)}x_n = y_n$ воспользуемся общей теорией приближенных методов.

Введем полином $\varphi_n(t) = \bar{V}_n x_n + T_n[Wx_n]$, где $\bar{V}_n x_n = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-$, $T_n[f]$ - полином наилучшего равномерного приближения функции f тригонометрическими полиномами n-го порядка, $\psi_n^\pm = T_n[\psi^\pm]$. Из конструктивной теории функций следует, что

$$\|K^{(1)}x_n - \varphi_n\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\|x_n\|.$$

Оценим теперь

$$\|P_nK^{(1)}x_n - K_n^{(1)}x_n\| \le \|P_n\left[\frac{l(t)}{2\pi i}\int\limits_\gamma h(t,\tau)[|\tau-t|^{-\eta}-d(t,\tau)]x_n(\tau)d\tau\right]\|+$$

$$+\|P_n\left[\frac{l(t)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(e^{is},e^{i\sigma})d(e^{is},e^{i\sigma})[x_n(\sigma)-\bar{x}_n(\sigma)]e^{i\sigma}d\sigma\right]\|+$$

$$+\|P_n\left[\frac{l(t)}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}[h(e^{is},e^{i\sigma})d(e^{is},e^{i\sigma})e^{i\sigma}-\right.$$

$$\left.-h(e^{is},e^{is_k})d(e^{is},e^{is_k})e^{is_k}]\bar{x}_n(\sigma)d\sigma\right]\| \le$$

$$\le A\|x_n\|n^{-\xi}\ln n,$$

где $\xi = \min(\alpha-\beta, 1-\eta-\beta, \beta)$, $\bar{x}_n(\sigma)-$ ступенчатая функция, равная $x_n(s_k)$ в интервале $[s_k, s_{k+1})$.

Из полученных оценок и общей теории приближенных методов анализа следует, что при n таких, что $q = An^{-\xi}\ln n < 1$, система уравнений $K_n^{(1)}x_n = y_n$ (и, следовательно, система уравнений (2.4)) имеет единственное решение x_n^* и $\|x^*-x_n^*\| < An^{-\xi}\ln n$, где x^* - решение уравнения $K^{(1)}x = y$. Так как уравнения $K^{(1)}x = y$ и (2.4) эквивалентны, то существует оператор K_n^{-1} с нормой $\|K_n^{-1}\| \le A\ln n$. В самом деле, $\|x_n^*\| \le \|[K_n^{(1)}]^{-1}\|\|P_n[lf]\| = \|[K_n^{(1)}]^{-1}\|\|P_n[lP_n[f]]\| \le$
$\le A\|[K^{(1)}]^{-1}\|\|P_n[f]\|\ln n$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Для простоты обозначений ниже положим $a(t)+b(t) \equiv 1$, $G(t) = \left[(a(t)-b(t))(a(t)+b(t))^{-1}\right]$. Уравнение (2.1) эквивалентно уравнению

$$K^{(2)}x \equiv x^+(t) - G(t)x^-(t) + U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau-t|^{-\eta}x(\tau)\right) = f, \quad (2.10)$$

и так как последнее уравнение однозначно разрешимо при любой правой части, то по теореме Банаха оператор $K^{(2)}$ непрерывно обратим и $\|K^{(2)}\| = C_1$. Аппроксимируем функцию $G(t)$ полигоном $G_n(t)$, построенным по n равноотстоящим узлам, и рассмотрим уравнение

$$K^{(3)}x \equiv x^+(t) - G_nx^-(t) + U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau-t|^{-\eta}x(\tau)\right) = f. \quad (2.11)$$

Это уравнение эквивалентно краевой задаче

$$\Gamma(x) \equiv \psi_n^-(t)x^+(t) - \psi_n^+(t)x^-(t) + \psi_n^-(t)U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau-t|^{-\eta}x(\tau)\right) =$$

$$= \psi_n^-(t) f(t), \tag{2.12}$$

где

$$\psi_n^{\pm}(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\ln G_n(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \right\}.$$

Уравнение (2.12) будем решать методом механических квадратур

$$\Gamma_n x_n \equiv P_n \Big[\psi_n^-(t) x_n^+(t) - \psi_n^+(t) x_n^-(t) +$$

$$+ \psi_n^-(t) \sum_{k=0}^{2n} h(t, t_k) x_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau - t^{-\eta} \, d\tau \Big] = P_n[\psi_n^-(t) f(t)], \tag{2.13}$$

где $t'_{k+1} = e^{is'_{k+1}}$, $s'_{k+1} = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}$.

Из неравенства $\|K^{(2)}x - K^{(3)}x\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\|x\|$ следует при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)} \ln n < 1$, непрерывная обратимость оператора $K^{(3)}$. Легко показать, что $\|\Gamma^{-1}\| \leq \|[K^{(3)}]^{-1}\| \|\|(\psi_n)^{-1}\|$. Метод коллокации для уравнения (2.12) был обоснован при доказательстве теоремы 2.1. Из неравенства $\|P_n \Gamma x_n - \Gamma_n x_n\|_{X_n} \leq A \left(n^{-(\alpha-\beta)} + n^{-\beta} \right) \ln n \|x_n\|$ следует, что при $q = An^{-\xi} \ln n < 1$, оператор Γ_n непрерывно обратим и $\|\Gamma_n^{-1}\| \leq$
$\leq \|\Gamma^{-1}\|/(1-q)$.

В § 1 показано, что решение $x^*(t)$ уравнения (2.1) принадлежит классу H_α. Точно так же можно показать, что решение $\bar{x}_n$ уравнения (2.12) также принадлежит классу H_α. Так как функция $\bar{x}_n$ является решением уравнения (2.12), то справедливо равенство

$$P_n[\psi_n^-(t)\bar{x}_n^+(t) - \psi_n^+(t)\bar{x}_n^-(t) + \psi_n^-(t) U_\gamma \left(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta} \bar{x}_n(\tau) \right)] = P_n[y(t)],$$

$$y(t) = \psi_n^-(t) f(t),$$

которое можно переписать в виде

$$P_n \left[\psi_n^-(t)\bar{x}_n^+(t) - \psi_n^+(t)\bar{x}_n^-(t) + \psi_n^-(t) \sum_{k=0}^{2n} h(t, t_k) \bar{x}_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau - t|^{-\eta} d\tau \right] =$$

$$= P_n \Bigg[y(t) - \psi_n^-(t) \Big[U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta} \bar{x}_n(\tau)) -$$

$$- \sum_{k=0}^{2n} h(t, t_k) \bar{x}_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau - t|^{-\eta} \, d\tau \Big] \Bigg].$$

Вычитая из этого тождества уравнение (2.13) и переходя к нормам, получаем:

$$\|\Gamma_n\left(\bar{x}_n(t)-\bar{x}_n^*(t)\right)\| \leq \left\| P_n \left[\psi^-(t) \Big[U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau-t|^{-\eta}\bar{x}_n(\tau)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{2n} h(t,t_k)\bar{x}_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau-t|^{-\eta}\,d\tau \Big]\right]\right\| = \|I\|,$$

где $\bar{x}_n^*$ - решение уравнения (2.13).

Обозначим через $\hat{x}_n$ полином наилучшего равномерного приближения степени n к функции $\bar{x}_n$. Тогда

$$\|\Gamma_n\left(\hat{x}_n-\bar{x}_n^*\right)\| \leq \|\Gamma_n\left(\bar{x}_n-\hat{x}_n\right)\| + \|I\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\ln n,$$

и так как $\|\Gamma_n^{-1}\| \leq A$, то $\|\hat{x}_n-\bar{x}_n^*\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\ln n$.

Уравнение (2.13) эквивалентно уравнению

$$K_n^{(3)}x_n \equiv P_n[x_n^+(t) - G_n(t)x_n^-(t) + \sum_{k=0}^{2n} h(t,t_k)x_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau-t|^{-\eta}d\tau] =$$

$$= P_n[f(t)]. \tag{2.14}$$

Воспользовавшись теоремой Крамера, можно показать, что

$$\|[K_n^{(3)}]^{-1}\| = A\|\Gamma_n^{-1}\| \leq A\|\Gamma^{-1}\|/(1-q).$$

Применяя к уравнению (2.14) теорему Банаха, можно показать, что при n таких, что $q_1 = (A\ln n)n^{-\alpha+\beta}\|\Gamma^{-1}\|/(1-q) < 1$, система уравнений

$$K_n^{(4)}x_n \equiv P_n[x_n^+(t) - G(t)x_n^-(t) + \sum_{k=0}^{2n} h(t,t_k)x_n(t_k) \int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau-t|^{-\eta}d\tau] =$$

$$= P_n[f(t)] \tag{2.15}$$

однозначно разрешима и справедлива оценка $\|\bar{x}_n^* - x_n^*\| \leq An^{-\alpha+\beta}\ln n$, где x_n^* - решение системы уравнений (2.15). Система уравнений (2.15) эквивалентна системе уравнений (2.5), следовательно, x_n^* является также решением уравнения (2.5). Собирая полученные выше оценки, имеем $\|x^* - x_n^*\| \leq An^{-\alpha+\beta}\ln n$.

Из результатов по построению асимптотически оптимальных квадратурных формул, полученных в монографиях [27], [34], следует оценка $\|x^* - x_n^*\| \geq An^{-\alpha+\beta}\ln n$. Из сопоставления двух предыдущих неравенств делаем вывод о справедливости теоремы.

Доказательство теоремы 2.3. При доказательстве теоремы 2.2 было отмечено, что уравнения (2.1) и (2.10) эквивалентны. Аппроксимируем функцию $G(t)$ сплайном $\tilde{G}_n(t)$ и рассмотрим уравнение

$$K^{(5)}x \equiv x^+(t) - \tilde{G}_n(t)x^-(t) + U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)) = f. \quad (2.16)$$

Из оценки $\|G(t) - \tilde{G}_n(t)\| \leq An^{-(r+\alpha-\beta)}$ и теремы Банаха следует, что при n таких, что $q = An^{-(r+\alpha-\beta)} < 1$, оператор $K^{(5)}$ непрерывно обратим и $\|[K^{(5)}]^{-1}\| \leq \|[K^{(2)}]^{-1}\|/(1-q) = A$. Уравнение (2.16) эквивалентно краевой задаче

$$M_n x \equiv \tilde{\psi}_n^-(t)x^+(t) - \tilde{\psi}_n^+(t)x^-(t) + \tilde{\psi}_n^-(t)U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)) = \tilde{y}_n,$$

где

$$\tilde{\psi}_n^\pm(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma [\ln \tilde{G}_n(t)](\tau - z)^{-1}\,d\tau\right\},\ \tilde{y}_n = \tilde{\psi}_n^-(t)f(t).$$

Метод механических квадратур для уравнения $M_n x = \tilde{y}_n$ имеет вид

$$M_n^* x_n \equiv P_n[\tilde{\psi}_n^-(t)x_n^+(t) - \tilde{\psi}_n^+(t)x_n^-(t) + \tilde{\psi}_n^-(t)U_\gamma[S_n^\tau[h(t,\tau)]x_n(\tau)|\tau - t^{-\eta}]] =$$
$$= P_n[\tilde{y}_n] \quad (2.17)$$

Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что из существования линейного оператора $[K^{(5)}]^{-1}$ следует существование линейного оператора M_n^{-1} с нормой $\|M_n^{-1}\| \leq A\|[K^{(5)}]^{-1}\| = A$ и что при n таких, что $q_1 =$
$= An^{(-r+\alpha+\beta)}\ln n < 1$ оператор M_n^* непрерывно обратим в подпространстве X_n, причем $\|M_n^{*-1}\| \leq A$.

Обозначим через $\bar{x}_n^*$ решение уравнения $M_n x = \tilde{y}_n$. Из теоремы Банаха следует $\|x^* - \bar{x}_n^*\| \leq An^{-r-\alpha+\beta}\ln n$, а из рассуждений §1 вытекает, что $\bar{x}_n^* \in W^r H_\alpha$. Тождество $P_n\left[M_n \bar{x}_n^*\right] = P_n\left[\tilde{\psi}_n^- f\right]$ можно переписать в виде

$$P_n[\tilde{\psi}_n^-(t)\bar{x}_n^{*+}(t) - \tilde{\psi}_n^+(t)\bar{x}_n^{*-}(t) + \tilde{\psi}_n^-(t)U_\gamma[S_n^\tau[h(t,\tau)]x_n^*(\tau)|\tau - t|^{-\eta}]] =$$
$$= P_n[\tilde{y}_n(t) - \tilde{\psi}_n^-(t)[U_\gamma(D_n^\tau[h(t,\tau)]\bar{x}_n^*(\tau)|\tau - t|^{-\eta})]],$$

где $D_n^\tau = E - S_n^\tau$.

Вычитая из этого тождества уравнение (2.17), имеем:

$$\|M_n^*\,(\bar{x}_n^* - \bar{x}_n^{**})\,\| = \|P_n[\tilde{\psi}_n^-(t)[U_\gamma(D_n^\tau[h(t,\tau)\bar{x}_n^*(\tau)]|\tau - t^{-\eta})]]\| \leq$$

$$\leq An^{-(r+\alpha-\beta)}\ln n,$$

где $\bar{x}_n^{**}$ - решение уравнения (2.17).

Пусть $\hat{x}_n^*$ – полином наилучшего равномерного приближения степени n к функции $\bar{x}_n^*$. Нетрудно видеть, что $\|M_n^*\| \leq A\ln n$. Следовательно, $\|M_n^*\,(\hat{x}_n^* - \bar{x}_n^{**})\,\| \leq \|M_n^*\,(\hat{x}_n^* - \bar{x}_n^*)\,\| + \|M_n^*\,(\bar{x}_n^* - \bar{x}_n^{**})\,\| \leq \leq An^{-(r+\alpha-\beta)}\ln n$. Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\|x^* - \bar{x}_n^{**}\| \leq \|x^* - \bar{x}_n^*\| + \|\bar{x}_n^* - \hat{x}_n^*\| + \|\hat{x}_n^* - \bar{x}_n^{**}\| \leq An^{-r-\alpha+\beta}\ln n.$$

Точно так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что при n таких, что $q_1 = An^{-r-\alpha+\beta}\ln n < 1$, из однозначной разрешимости системы уравнений (2.17) следует однозначная разрешимость системы уравнений (2.6) и оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq$
$\leq An^{-r-\alpha+\beta}\ln n$, где x_n^*– решение системы (2.6).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Проведем обоснование метода коллокации для уравнения (2.2). В операторной форме метод коллокации записывается выражением

$$L_n^{(1)}x_n \equiv P_n[a(t)x_n(t) + S_\gamma(h(t,\tau)x_n(\tau))] = P_n[f(t)]. \qquad (2.18)$$

Уравнения (2.2) и (2.18) эквивалентны краевым задачам

$$Z^{(1)}x \equiv Vx + Wx = y \qquad и \qquad Z_n^{(1)}x_n \equiv V_nx_n + W_nx_n = y_n,$$

где

$$Vx = \psi^-x^+ - \psi^-x, \quad Wx = \psi^-S_\gamma((h(t,\tau - h(t,t))x), \quad V_nx_n = P_n[Vx_n],$$

$$W_nx_n = P_n[Wx_n], \quad y = \psi^-f, \quad y_n = P_n[y], \quad G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},$$

$$b(t) = h(t,t), \quad \psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\ln G(\tau))(\tau - z)^{-1}\,d\tau\right\}.$$

Введем полином

$$\varphi_n(t) = V_n^*x_n + T_{[n/3]}[\psi^-(t)]S_\gamma((\tilde{h}(t,\tau) - \tilde{h}(t,t))x_n(\tau)),$$

где $V_n^* x_n = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-$, $\psi_n = T_n(\psi)$, $\tilde{h}(t,\tau) = T_{[n/3]}^t T_{[n/3]}^\tau [h(t,\tau)]$, через $T_n(\psi)$ обозначен полином наилучшего равномерного приближения степени n к функции ψ. Очевидно, $\|V_n x_n - V x_n\| \leq A\|x_n\| E_n(\psi) n^\beta$. Так как $\|h(t,\tau) - \tilde{h}(t,\tau)\| \leq A \ln n \max\{E_n^t[h(t,\tau)], E_n^\tau[h(t,\tau)]\}$, то функция $\eta(t,\tau) = h(t,\tau) - \tilde{h}(t,\tau)$ входит в класс Гельдера по переменной τ с показателем $1/\ln n$ и с коэффициентом $A \ln n E_n^*(h)$, где $E_n^* =$
$= \ln n \max\{E_n^t[h(t,\tau)], E_n^\tau[h(t,\tau)]\}$. Поэтому $\|S_\gamma\left((h(t,\tau) - \tilde{h}(t,\tau)) - -(h(t,t) - \tilde{h}(t,t)) x_n(\tau)\right)\| \leq A\|x_n\| n^\beta \ln n E_n^*(h)$. Из этого неравенства и полученной выше оценки нормы $\|V_n x_n - V x_n\|$ следует, что при n таких, что $q_1 = A \ln^2 n n^\beta \max\{E_n(\psi(t)), E_n^t(h(t,\tau)), E_n^\tau(h(t,\tau)\} < 1$, оператор $Z_n^{(1)}$ непрерывно обратим и $\|[Z_n^{(1)}]^{-1}\| \leq A \ln n$. При этом $\|x^* - x_{1n}^*\| \leq A(q_1 + E_n(f))$, где x_{1n}^*– решение уравнения (2.18). Уравнения $Z_n^{(1)} x_n = y_n$ и (2.18) эквивалентны. Следовательно, оператор $L_n^{(1)}$ непрерывно обратим и $\|[L_n^{(1)}]^{-1}\| \leq A \ln n$.

Так как $\|L_n^{(1)} - L_n\| \leq A n^{-(\alpha-\beta)} \ln n$, то при n таких, что $q_2 = = \max\{q_1, A n^\beta \ln^2 n E_n^\tau(h(t,\tau))\} < 1$, оператор L_n непрерывно обратим и $\|x_n^* - x_{1n}^*\| \leq A n^\beta \ln^2 n E_n^\tau(h)$. Объединяя оценки для $\|x^* - x_{1n}^*\|$ и $\|x_{1n}^* - x_n^*\|$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Доказательство теоремы 2.5. При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что при n таких, что $q_1 < 1$, оператор $L_n^{(1)}$ непрерывно обратим и $\|[L_n^{(1)}]^{-1}\| \leq A \ln n$. Справедливость тождества

$$\overline{P}_n \left[\frac{1}{\pi i} \int_\gamma P_n^\tau \left[\frac{h(t,\tau) x_n(\tau)}{\tau - t} \right] d\tau \right] \equiv \overline{P}_n \left[\frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{P_n^\tau [h(t,\tau) x_n(\tau)]}{\tau - t} d\tau \right] \equiv$$

$$\equiv \overline{P}_n \left[\frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{P_n^\tau [h(t,\tau)] x_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] \quad (2.19)$$

следует из результатов по квадратурным формулам наивысшей алгебраической точности [104]. Воспользовавшись этим тождеством,
можно показать, что $\|L_n^1 - \tilde{L}_n\| \leq A n^\beta \ln^2 n (E_n^t(h(t,\tau)) + E_n^\tau(h(t,\tau)))$. Следовательно, при n таких, что $q = A n^\beta \ln^2 n \left(E_n^t + E_n^\tau\right) < 1$, оператор $\tilde{L}_n$ непрерывно обратим. Погрешность $\|x^* - x_n^*\|$ оценивается, как в предыдущих теоремах. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.6 подобно доказательству теоремы 2.5 и поэтому опускается.

3. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах интегрирования (обоснование в пространстве L_2)

Продолжим исследование приближенных методов решения с.и.у. (2.1) и (2.2). Обоснование предлагаемых ниже вычислительных схем будем проводить в пространстве функций $X = L_2(\gamma)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(e^{is}) \overline{f_2(e^{is})} ds$$

и его подпространстве X_n, состоящем из полиномов вида (2.3).

3.1. Приближенное решение уравнения (2.1)

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде полинома (2.3), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которая в операторной форме имеет вид (2.4).

Теорема 3.1 [16], [18], [28]. Пусть в пространстве X оператор K имеет линейный обратный и функции $a, b, f \in C[0;2\pi]$, $h \in C[0;2\pi]^2$. Тогда при n таких, что

$$q = A\left[\omega(a; n^{-\frac{1}{2}}) + \omega(b; n^{-\frac{1}{2}}) + n^{-\frac{1}{2}} + [\omega(h; n^{-1}) + n^{-\eta}]^{\frac{1-\eta}{1+\eta}}\right] < 1,$$

уравнение (2.4) однозначно разрешимо при любой правой части и имеет место оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq A[q + \omega(f; n^{-1})]$, где x^* и x_n^* - решения уравнений (2.1) и (2.4), соответственно.

Доказательство. Введем уравнение

$$K^{(1)}x \equiv \tilde{a}_m(t)x(t) + \frac{\tilde{b}_m(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} h(t,\tau)d^*(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{3.1}$$

где $\tilde{a}_m(t)$, $\tilde{b}_m(t)$ - полиномы наилучшего равномерного приближения степени m для функций $a(t)$, $b(t)$, соответственно, $d^*(t,\tau) = |\tau - t|^{-\eta}$ при $|\tau - t| > \rho$, $d^*(t,\tau) = \rho^{-\eta}$ при $|\tau - t| < \rho$, ρ - положительное число, $\rho > s_1 = 2\pi/(2n+1)$. Числа ρ и m фиксируются ниже.

Из теоремы Банаха следует, что при m и ρ таких, что

$$q_1 = A(\rho^{1-\eta} + \omega(a; m^{-1}) + \omega(b; m^{-1})) < 1,$$

оператор $K^{(1)}$ имеет линейный обратный с нормой, оцениваемой неравенством $\|[K^{(1)]^{-1}}\| \leq \|K^{-1}\|/(1 - q_1)$.

Метод механических квадратур для уравнения $K^{(1)}x = f$ в операторной форме записывается следующим образом:

$$K_n^{(1)}x_n \equiv P_n[\tilde{a}_m(t)x_m(t) + \frac{\tilde{b}_m(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{x_n(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} P_n^{\tau}[h(t,\tau)d^*(t,\tau)x_n(\tau)]d\tau] = P_n[f] = \tilde{f}_n. \tag{3.2}$$

Поставим в соответствие каждой функции $z(t) \in L_2$ функции $z^+(t)$ и $z^-(t)$, аналитические внутри и вне γ соответственно, и связанные с $z(t)$ формулами Племеля – Сохоцкого: $z(t) = z^+(t) - z^-(t)$, $S(t) =$
$= z^+(t) + z^-(t)$.

В предыдущем параграфе было показано, что уравнения $K^{(1)}x = f$ и $K_n^{(1)}\tilde{x}_n = \tilde{f}_n$ эквивалентны, соответственно, следующим уравнениям, записываемым в операторной форме

$$K^{(2)}x \equiv Vx + Wx = y, \quad K^{(2)} \in [X \to X], \tag{3.3}$$

и

$$K_n^{(2)}x_n \equiv \tilde{V}_n x_n + \tilde{W}_n x_n = \tilde{y}_n, \quad K_n^{(2)} \in [X_n \to X_n], \tag{3.4}$$

где

$$Vx = \psi^- x^+ - \psi^+ x^-, \quad Wx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma h(t,\tau)d^*(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$l = \psi^-/(\tilde{a}_m + \tilde{b}_m),$$

$$\psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left[ln\left[\frac{\tilde{a}_m(\tau) - \tilde{b}_m(\tau)}{\tilde{a}_m(\tau) + \tilde{b}_m(\tau)}\right] : (\tau - z)\right]d\tau\right\},$$

$$\tilde{V}_n x_n = P_n[Vx_n],$$

$$\tilde{W}_n x_n = P_n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma P_n^\tau[h(t,\tau)d^*(t,\tau)x_n(\tau)]d\tau\right],$$

$$y = lf, \quad \tilde{y}_n = P_n[y],$$

$X_n = \left\{\sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k\right\} - (2n+1)$ - мерное пространство полиномов степени не выше n, с той же нормой, что и пространство X.

Для обоснования предложенной вычислительной схемы введем полином

$$\varphi_n(t) = V_n^* x_n + (T^{[n/2]}[l])\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma T_t^{[n/2]}[h(t,\tau)d^*(t,\tau)]x_n(\tau)d\tau,$$

где $V_n^* x_n = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-$, $T^{[n/2]}[f]$ и ψ_n - полиномы наилучшего равномерного приближения степени $[n/2]$ и n для функций f и ψ, соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\|K^{(2)}x_n - \varphi_n\| + \|P_n K^{(2)}x_n - \varphi_n\| \le$$

$$\leq A(m^{1-\varepsilon}/n^{1-\varepsilon}+\omega(h;n^{-1})/\rho^{2\eta})\|x_n\|, \tag{3.5}$$

где ε - произвольное число $0<\varepsilon<1$ (необходимость введения ε следует из теоремы И.И. Привалова (см. гл. 1) так как $\tilde{a}_m, \tilde{b}_m$ входят в класс Гельдера с показателем 1 и с коэффициентами $m \cdot \max|\tilde{a}_m|$, $m \cdot \max|\tilde{b}_m|$, соответственно).

Очевидно,

$$\|K_n^{(2)}x_n - P_nK^{(2)}x_n\| \leq \left\| P_n\left[\frac{l(t)}{2\pi i}\int_\gamma R_n^\tau[h(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d^*(t,\tau)]d\tau\right]\right\| \leq$$

$$\leq A(\omega(h;n^{-1})+n^{-\eta})\|x_n\|/\rho^{2\eta}, \tag{3.6}$$

где $R_n = E - P_n,\ E-$ единичный оператор.

Из (3.5) – (3.6) (полагая $\rho=[\omega(h;n^{-1})]^{1/(1+\eta)}$, $\varepsilon=1/\ln n,\ m=n^{1/2}$) и общей теории приближенных методов анализа следует, что при n таких, что

$$q_2 = A[\omega(a;n^{-1/2})+\omega(b;n^{-1/2})+n^{-1/2}+[\omega(h;n^{-1})]^{(1-\eta)/(1+\eta)}]<1,$$

существует линейный оператор $[K_n^{(2)}]^{-1}$ с нормой $\|[K_n^{(2)}]^{-1}\| \leq$ $\leq \|[K^{(2)}]^{-1}\|/(1-q_2)$. При этом $\|x^*-\tilde{x}_1^*\| \leq A\{\omega(a;n^{-1/2})+$ $\omega(b;n^{-1/2})+$
$+n^{-1/2}+[\omega(h;n^{-1})]^{(1-\eta)/(1+\eta)}+\omega(f;n^{-1})\}$, где x^* и $\tilde{x}_1^*$ - решения уравнений (2.1) и (3.4), соответственно.

Так как уравнения (3.4) и $K_n^{(1)}x_n=\tilde{f}_n$ эквивалентны, то существует линейный оператор $[K_n^{(1)}]^{-1}$. Оценим его норму. Так как

$$\|\tilde{x}_1^*\| \leq \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|\tilde{y}_n\| = \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|P_n[lP_n[f]]\| \leq \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|l\|\|P_n[f]\|,$$

то $\|[K_n^{(1)}]^{-1}\| \leq \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|l\|$.

Нетрудно видеть, что

$$\|(K_n-K_n^{(1)})x_n\| \leq A[[|a-\tilde{a}|+|b-\tilde{b}|]\|x_n\|+I_1, \tag{3.7}$$

где

$$I_1 = \left\| P_n^t\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P_n^\tau[h(t,\tau)x_n(\tau)b(t,\tau)]d\tau\right]\right\|,$$

$$b(t,\tau)=[d^*(t,\tau)-d(t,\tau)].$$

I_1 можно представить в следующем виде:

$$I_1 \leq \max_s\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n^\sigma[h(s,\sigma)\mathrm{sgn}[b(s,\sigma)]|b(s,\sigma)|^{1/2}]|^2d\sigma\right\}^{1/2} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|P_n^\sigma[x_n(\sigma)e^{i\sigma}P_n^s[|b(s,\sigma)|^{1/2}]]|^2 d\sigma\right\}ds\right\}^{1/2}=$$

$$= I_2\cdot I_3, \tag{3.8}$$

где

$$h(s,\sigma)=h(e^{is},e^{i\sigma}),\quad b(s,\sigma)=b(e^{is},e^{i\sigma}).$$

Обозначив через ν величину $[\rho(2n+1)/2\pi]+1$, оценим I_2 :

$$I_2^2\le A\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{1}{s_k}\right)^\eta\le A\left[\frac{1}{(2n+1)^{1-\eta}}+\rho^{1-\eta}\right]. \tag{3.9}$$

Нетрудно видеть, что

$$I_3^2\le\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{2n}|x_n(s_i)|^2|b(s_k,s_i)||l(s_i)|^2\le$$

$$\le\frac{|l|}{(2n+1)^2}\sum_{i=0}^{2n}|x_n(s_i)|^2\sum_{k=0}^{2n}|b(s_k,s_i)|\le A\|x_n\|^2\rho^{1-\eta}. \tag{3.10}$$

Из оценок (3.8) – (3.10) (при приведенных выше значениях m, ρ) и теоремы Банаха следует справедливость теоремы 3.1.

Замечания. 1. Величины A могут быть легко оценены, если известна $\|K^{-1}\|$. Последнюю можно оценить, пользуясь результатами монографии [82].

2. Выше был рассмотрен случай, когда индекс уравнения (2.1) равен 0. Случай произвольного индекса сводится к предыдущему [82].

3. Так как X - гильбертово пространство, то для нахождения решения уравнения (2.1) может быть применен метод наискорейшего спуска [102].

3.2. Приближенное решение полных сингулярных интегральных уравнений

В этом пункте рассматриваются сингулярные интегральные уравнения вида

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{h(t,\tau)x(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t). \tag{3.11}$$

Приближенное решение уравнения (3.11) ищем в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \psi_k(s),$$

$$\psi_k(s) = \frac{1}{2n+1}\left[\sin\frac{2n+1}{2}(s - s_k)\right]\left(\sin\frac{s - s_k}{2}\right)^{-1},$$
$$s_k = 2k\pi/(2n+1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений, записываемых в операторной форме следующим образом:

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n\left[a(s)x_n(s) - \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^{\sigma}\left[h(s,\sigma)x_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\right]d\sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^{\sigma}[h(s,\sigma)x_n(\sigma)]d\sigma\right] = \bar{P}[f(s)], \tag{3.12}$$

где $a(s) = a(e^{is})$, $h(s,\sigma) = h(e^{is}, e^{i\sigma})$, $f(s) = f(e^{is})$, $P_n(\bar{P}_n)$ - оператор проектирования на тригонометрические интерполяционные полиномы степени n по узлам $s_k = 2k\pi/(2n+1)(\bar{s}_k = (2k\pi+\pi)/(2n+1))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$.

Пусть функции $a(t)$, $f(t)$, $h(t,\tau)$ (по обеим переменным) обладают одним из следующих свойств:

1) имеют производные r-го порядка $(r = 0, 1, \cdots)$, удовлетворяющие условию Гельдера H_α, т.е.

$$a(t), f(t) \in W^r H_\alpha, \quad h(t,\tau) \in W^{r,r}H_{\alpha,\alpha}, \quad r = 0, 1, \ldots, \quad 0 < \alpha < 1;$$

2) являются аналитическими в кольце

$$R_1 \le |t| \le R_2, \quad R_1 < 1, \quad R_2 > 1. \tag{3.13}$$

Будем считать, что оператор K имеет линейный обратный.

Прежде всего, проведем обоснование метода коллокации для уравнения (3.11). Метод коллокации в операторной форме записывается следующим образом:

$$K_n^{(1)} x_n \equiv \bar{P}_n \left[a(t) x_n(t) + \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{h(t,\tau) x_n(\tau)}{\tau - t} d\tau - f(t) \right] = 0. \qquad (3.14)$$

Уравнения (3.11) и (3.14) эквивалентны, соответственно, следующим уравнениям, записываемым в операторной форме:

$$K^{(2)} x \equiv Vx + Wx = y, \quad K^{(2)} \in [X \to X], \qquad (3.15)$$

и

$$K_n^{(2)} x_n \equiv \tilde{V}_n x_n + \tilde{W}_n x_n = \tilde{y}_n, \quad K_n^{(2)} \in [\tilde{X} \to \tilde{X}], \qquad (3.16)$$

где

$$Vx \equiv \psi^- x^+ - \psi^+ x^-, \quad Wx = lUx, \quad l = \psi^-/(a+b),$$

$$b(t) = h(t,t), \quad \psi(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\tau - z)^{-1} ln \frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)} d\tau \right\},$$

$$\tilde{V}_n x_n = \bar{P}_n [V x_n], \quad \tilde{W}_n x_n = \bar{P}_n [W x_n], \quad y = lf, \quad \tilde{y}_n = \bar{P}_n [y],$$

$$Ux = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma h_1(t,\tau) x(\tau) d\tau, \quad h_1(t,\tau) = (h(t,\tau) - h(t,t))/(\tau - t);$$

$X_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k \right\}$ есть $(2n+1)$-мерное пространство полиномов степени не выше n с той же нормой, что и пространство X.

Для обоснования метода коллокации введем полином

$$\tilde{\varphi}_n(t) = V_n x_n + (T^{[n/3]}[l]) \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{h}(t,\tau) - \tilde{h}(t,t)}{\tau - t} x_n(\tau) d\tau,$$

где $V_n x_n = \psi_n^+ x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-$, $\quad [n/3]$– целая часть от $n/3$; через $\tilde{h}(t,\tau)$ обозначен полином наилучшего равномерного приближения степени $[n/3]$ по t и τ к функции $h(t,\tau)$, т.е. $\tilde{h}(t,\tau) = T_{[n/3]}^t [T_{[n/3]}^\tau [h(t,\tau)]]$; $T^{[n/3]}[f]$ и ψ_n– полиномы наилучшего равномерного приближения степени $[n/3]$ и n для функций f и ψ, соответственно.

Оценим $\|K^{(2)} x_n - \tilde{\varphi}_n\|$. Очевидно,

$$\|V_n x_n - V x_n\| \le A \|x_n\| \max[E_n(\psi^+), E_n(\psi^-)], \qquad (3.17)$$

где $E_n(f)$ - наименьшее уклонение функции f от тригонометрических полиномов степени не выше n в метрике $C_{2\pi}$.

Так как $|h(t,\tau)-\tilde{h}(t,\tau)| \le AE_n^{t,\tau}(h)\ln n$ (здесь $E_n^{t,\tau}(h) = \max[E_n^t(h(t,\tau)), E_n^\tau(h(t,\tau))]$), то, применяя к функции $\eta(t,\tau) = h(t,\tau)-\tilde{h}(t,\tau)$ теорему Бернштейна о структурных свойствах функций (см. теоремы 4.8 и 4.9 из введения), убеждаемся, что эта функция по переменной τ входит в класс Гельдера с показателем $1/\ln n$ и с коэффициентом $A\ln^2 nE_n^{t,\tau}(h)$. Поэтому

$$\left\|\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{[h(t,\tau)-\tilde{h}(t,\tau)]-[h(t,t)-\tilde{h}(t,t)]}{\tau-t}\tilde{x}(\tau)d\tau\right\| \le$$
$$\le A\|\tilde{x}\|E_n^{t,\tau}(h)\ln^2 n. \qquad (3.18)$$

Из (3.17), (3.18) следует, что

$$\|K^2x_n-\tilde{\varphi}_n\| \le A\|x_n\|\ln^2 n\max[E_n(\psi^+), E_n(\psi^-), E_n^{t,\tau}(h)].$$

Так как для $\|\bar{P}_nK^{(2)}x_n-\tilde{\varphi}_n\|$ справедлива аналогичная оценка, то из общей теории приближенных методов анализа следует, что при n таких, что $q_1 = A\ln^2 n\max[E_n(\psi^+)E_n^{t,\tau}(h), E_n(\psi^-)] < 1$, существует линейный оператор $[K_n^{(2)}]^{-1}$ с нормой $\|[K_n^{(2)}]^{-1}\| \le \|[K^{(2)}]^{-1}\|/(1-q_1)$. При этом $\|x^*-\tilde{x}_n^*\| \le A\ln^2 n\max[E_n(\psi^+), E_n(f), E_n(\psi^-), E_n^{t,\tau}(h)]$, где x^* и $\tilde{x}_n^*$– решения уравнений (3.11) и (3.16), соответственно. Так как уравнение (3.16) эквивалентно (3.14), то существует линейный оператор $[K_n^{(1)}]^{-1}$. Оценим его норму. Очевидно, $\|\tilde{x}_n^*\| \le \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|\tilde{y}_n\| =$
$= \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|\bar{P}_n[l\bar{P}_n[f]]\| \le \|[K_n^{(2)}]^{-1}\|\|l\|\|\bar{P}_n[f]\|$, т.е. $\|\tilde{[}K_n^{(1)}]^{-1}\| \le A$.

Прежде чем приступить к оценке $\|K_n^{(1)}-K_n\|$, заметим, что справедливо тождество

$$\bar{P}_n\left[\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma\left[h(s,\sigma)x_n(\sigma)\text{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma\right] \equiv$$
$$\equiv \bar{P}_n\left[\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma[h(s,\sigma)]x_n(\sigma)\text{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right] \equiv$$
$$\equiv \bar{P}_n\left[\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma[h(s,\sigma)x_n(\sigma)]\text{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right].$$

Справедливость этого тождества следует из того, что если $f(s)$– полином степени не выше n, то $[f(\sigma)-f(s)]\text{ctg}[(\sigma-s)/2]-$

полином степени не выше n и

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathrm{ctg}\frac{s_k - \bar{s}_j}{2} = 0.$$

Воспользовавшись предыдущим тождеством, получаем:

$$\|K_n x_n - K_n^{(1)} x_n\| \leq \left\| \bar{P}_n \left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\nu(\tau,\tau) x_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right] \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\nu(t,\tau) - \nu(\tau,\tau)}{\tau - t} x_n(\tau) d\tau \right\|,$$

где $\tilde{h}^*(t,\tau) = P_n^\tau[h(t,\tau)]$, $\nu(t,\tau) = \bar{P}_n^t[h(t,\tau) - \tilde{h}^*(t,\tau)]$.

Так как функция $\nu(t,\tau)$ входит по переменной t в класс Гельдера с показателем $1/\ln n$ и с коэффициентом $A \ln^2 n E_n^\tau(h)$, то справедлива оценка

$$\|K_n x_n - K_n^{(1)} x_n\| \leq A \|x_n\| \ln^2 n E_n^\tau(h).$$

Из этой оценки и теоремы Банаха следует при n таких, что $q_2 = \max\{q_1, A \ln^2 n E_n^\tau(h)\} < 1$, существование линейного обратного оператора K_n^{-1}. При этом $\|K_n^{-1}\| \leq \|[K^{(1)}]_n^{-1}\|/(1 - q_2)$. Кроме того, $\|x_n^* - \tilde{x}_n^*\| \leq A \ln^2 n E_n^\tau(h)$, где x_n^* - решение уравнения (3.12).

Очевидно, $\|x^* - x_n^*\| \leq \|x^* - \tilde{x}_n^*\| + \|\tilde{x}_n^* - x_n^*\|$. Собирая полученные выше оценки, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.2 [19]. Пусть оператор K имеет линейный обратный. Тогда при n таких, что $q = A \ln^2 n \max[E_n(\psi), E_n^{t,\tau}(h), E_n(h(t,t))] < 1$, оператор K_n имеет линейный обратный с нормой $\|K_n^{-1}\| \leq A$ и $\|x^* - x_n^*\| \leq A \ln^2 n \max[E_n(\psi), E_n(f), E_n(h(t,t)), E_n^{t,\tau}(h)]$, где x^* и x_n^*– решения уравнений (3.11) и (3.14), соответственно.

Замечания. 1. Конкретизируя $E_n(\varphi)$ для различных классов функций φ, получаем эффективные оценки скорости сходимости и погрешности. Так, например, если выполнено первое из условий (3.13), то $q = A \ln^2 n / n^{r+\alpha}$ и $\|x^* - x_n^*\| \leq A \ln^2 n / n^{r+\alpha}$, а если выполнено второе условие, то $q = A \ln^2 n [R_2^{-n-1} + R_1^{n+1}]$ и $\|x^* - x_n^*\| \leq A \ln^2 n [R_2^{-n-1} + R_1^{n+1}]$.

2. Выше был рассмотрен случай, когда индекс χ уравнения (3.11) равен нулю. Случай произвольного индекса сводится к предыдущему.

3. В [82] отмечено, что при аппроксимации с.и.у. системами алгебраических уравнений высокого порядка последние предпочти-

тельнее решать итерационными методами. Поэтому при практическом решении уравнения (3.11) следует, найдя начальное приближение к решению x^* методом коллокации, дальнейшее уточнение решения производить методом наискорейшего спуска, примененным к системе уравнений (3.12) достаточно высокого порядка.

4. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами и на разомкнутых контурах интегрирования

Исследуем проекционные методы решения уравнений

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)S_\gamma(x(\tau)) + U_\gamma(h(t,\tau)x(\tau)) = f(t), \tag{4.1}$$

$$Lx \equiv e(t)x(t) + S_L(k(t,\tau)x(\tau)) = g(t). \tag{4.2}$$

Здесь $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат, $L = (c_1, c_2)-$ сегмент γ. Будем считать, что $a(t), b(t), h(t,\tau), f(t)-$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$ всюду на окружности γ, за исключением точки $t = 1$, где функции $a(t)$ и $b(t)$ имеют разрыв первого рода. Функции $e(t), g(t) \in H_\alpha$, $k(t,\tau) \in$
$\in H_{\alpha,\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$. В плоскости комплексной переменной проведем разрез из начала координат через точку $C(t = 1)$ в бесконечность. В разрезанной таким образом плоскости используемые ниже функции $(t-1)^\delta$ и t^δ являются аналитическими.

Результаты этого параграфа частично изложены в работах автора [22], [24], [28].

4.1. Основные утверждения

Сингулярные интегральные уравнения на разомкнутых контурах интегрирования сводятся к с. и. у. с разрывными коэффициентами. Поэтому основное внимание будем уделять с. и. у. (4.1). Из теории с. и. у. [125] следует, что особенности решения $x^*(t)$ уравнения (4.1) совпадают с особенностями канонической функции класса $h(C)$, соответствующей оператору $K^0x \equiv a(t)x(t)+b(t)S_\gamma(x(\tau))$.

Пусть решение $x^*(t)$ в окрестности узла C имеет вид $(t-C)^\delta\varphi(t)$, где $\delta = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(C-0)}{G(C+0)} = \xi + i\zeta$, $-1 < \xi < 1$, $\varphi \in H_\alpha$, $G(t) = d(t)s(t)$, $d(t) = a(t) - b(t)$, $s(t) = (a(t) + b(t))^{-1}$.

В зависимости от величины ξ (предполагается, что $-\eta + \xi > -1$) необходимо различать два случая: а) $0 < \xi < 1$, б) $-1 < \xi \leq 0$. В каждом случае приходится рассматривать отдельную вычислительную схему и проводить ее обоснование.

Остановимся вначале на случае "а": $0 < \xi < 1$. Приближенное решение уравнения (4.1) ищем в виде полинома (2.3), коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n[a(t)x_n(t) + b(t)S_\gamma(x_n(\tau)) +$$
$$+U_\gamma(\bar{P}_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] = \bar{P}_n[f(t)]. \qquad (4.3)$$

Обоснование этой вычислительной схемы проводится в пространстве $X = H_\beta$ ($\beta < \lambda_1 = \min(\alpha, \xi, 1-\eta)$) и его подпространстве X_n, состоящем из полиномов вида (2.3).

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия: функции $a, b,\ f \in H_\alpha,\ h \in H_{\alpha\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$ всюду, кроме точки $t = 1$, в которой $a(t)$ и $b(t)$ имеют разрыв первого рода; краевая задача $\psi^+(t) = G(t)\psi^-(t)$ имеет решение вида $\psi(t) = (t-1)^\delta \varphi(t)$, $\delta = \xi + i\zeta$; $\xi > 0$; оператор $K \in [X, X]$ непрерывно обратим. Тогда при n таких, что $q = A(n^{-(\lambda_1-\beta)} + n^{-\beta}) \ln n < 1$, система уравнений (4.3) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq Aq$, где x^* и x_n^*– решения уравнений (4.1) и (4.3).

Приближенное решение уравнения (4.1) ищем в виде полинома (2.3), коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n[a(t)x_n(t) + b(t)S_\gamma(x_n(\tau)) +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{2n} h(t,t_k)x_n(t_k)\int_{t'_k}^{t'_{k+1}} |\tau - t|^{-\eta} d\tau] = \bar{P}_n[f(t)], \qquad (4.4)$$

где $t'_k = e^{is'_k}$, $s'_k = (2k+1)\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и решение $x^*(t)$ уравнения (4.1) имеет вид $x^*(t) = (t-1)^\delta \varphi^*(t)$, где $\varphi^*(t) \in H_\alpha$. Тогда при n таких, что $q = A\left(n^{-(\alpha-\beta)} + n^{-(\xi-\beta)}\right)\ln n < 1$, система уравнений (4.4) однозначно разрешима при любой правой части и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq A(n^{-(\alpha-\beta)} + n^{-(\xi-\beta)}) \ln n$, где x^* и x_n^*– решения уравнений (4.1) и (4.4).

Перейдем теперь к случаю "б": $-1 < \xi \leq 0$. Обозначим через X^* пространство функций $x(t)$ вида $x(t) = (t-1)^\delta \varphi(t)$ с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{t\in\gamma} |\varphi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2 1 \notin (t_1,t_2)} \left[\frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}\right],$$

где $\beta < \lambda_2 = \min(\alpha, 1 - \eta + \xi)$. Через Y обозначим пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера H_β с нормой

$$\|y(t)\| = \max_{t\in\gamma} |y(t)| + \sup_{t_1\neq t_2 1\notin(t_1,t_2)} \left[\frac{|y(t_1)-y(t_2)|}{|t_1-t_2|^\beta}\right].$$

Через Y_n обозначим подпространство пространства Y, состоящее из полиномов вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k$.

Приближенное решение уравнения (4.1) ищем в виде функции $x_n(t) = x_n^+(t) + x_n^-(t)$, где

$$x_n^+(t) = (t-1)^\delta \varphi_n^+(t) = (t-1)^\delta \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k,$$

$$x_n^-(t) = \left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta \varphi_n^-(t) = \left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k, \tag{4.5}$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы уравнений

$$\bar{K}_n x_n \equiv \bar{P}_n[x_n^+(t) - G(t)x_n^-(t) + s(t)U_\gamma(\bar{P}_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] =$$
$$= \bar{P}_n[s(t)f(t)]. \tag{4.6}$$

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия: 1) функции $a, b, f \in H_\alpha$, $h \in H_{\alpha,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ всюду, кроме точки $t = 1$, в которой $a(t), b(t)$ имеют разрыв первого рода; 2) оператор K, действующий из пространства X^* в пространство Y, непрерывно обратим; 3) краевая задача $\psi^+(t) = G(t)\psi^-(t)$ имеет решение вида $(t-1)^\delta\varphi(t)$, $\delta = \xi + i\zeta$, $-1 < \xi \le 0$. Тогда при n таких, что $q = A\left(n^{-(\lambda_2-\beta)} + n^{-\beta}\right)\ln n < 1$ $(\lambda_2 = \min(\alpha, 1-\eta+\xi, 1+\xi))$, система уравнений (4.6) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \le A(n^{-(\lambda_2-\beta)} + n^{-\beta})\ln n$, где x^*- решение уравнения (4.1).

Отметим изменения, которые возникают при построении вычислительной схемы и ее обосновании, если предположить, что свободный член уравнения (4.1) имеет в точке $c = 1$ особенность вида $(t-1)^\nu$. Введем пространство Y^* функций вида $y(t) = (t-1)^\nu\varphi(t)$, $\varphi \in H_\beta$, с нормой

$$\|y\| = \max_{t\in\gamma} |\varphi(t)| + \sup_{t_1\neq t_2 1\notin(t_1,t_2)} \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\beta},$$

и его подпространство $Y_n^* \subset Y^*$, состоящее из функций вида $y_n^* = (t-1)^\nu \sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k$. Через $\bar{P}_n^*$ обозначим оператор, действующий из Y^* в Y_n^* по формуле $\bar{P}_n^* y(t) = \bar{P}_n^*[(t-1)^\nu\varphi(t)] = (t-1)^\nu \bar{P}_n[\varphi(t)]$.

Будем считать, что оператор K действует из X^* в Y^* и имеет непрерывный обратный. Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции $x_n(t)$, определенной выражением (4.5), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются из системы алгебраических уравнений

$$K_n^* x_n \equiv \bar{P}_n^*[x_n^+(t) - G(t)x_n^-(t) + s(t)U_\gamma[\bar{P}_n^\tau(h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau))d\tau]] =$$
$$= \bar{P}_n^*[s(t)f(t)]. \tag{4.7}$$

Здесь $d(t,\tau)-$ функция определенная в § 2.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда при n таких, что $q = A(n^{-(\lambda_2-\beta)} + n^{-\beta})\ln n < 1$, система уравнений (4.7) однозначно разрешима при любой правой части и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*| \leq Aq$, где x^* и x_n^*- решения уравнений (4.1) и (4.7).

В ряде случаев оказывается предпочтительней рассматривать уравнения (4.1) и (4.2) как операторные уравнения в пространстве L_p $(1 < < p < \infty)$ и проводить обоснование вычислительных схем в пространствах L_p и их подпространствах $L_{n,p}$, состоящих из полиномов вида (2.3).

Теорема 4.5. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве L_2, коэффициенты $a(t), b(t), f(t) \in H_\alpha$, $h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}$ непрерывны всюду на γ, за исключением точки $t = 1$, в которой $a(t), b(t)$ имеют разрыв первого рода. Тогда при n таких, что $q = A(n^{-\alpha} + n^{\Theta} +$
$+n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)}) < 1$, система уравнений (4.3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq Aq$, где x^*- решение уравнения (4.1). Здесь $\Theta = -(1-|\xi|)$ при $\xi \leq 0$, $\Theta = -\xi$ при $\xi > 0$; функция $(t-1)^\delta \varphi_0(t)$, где $\delta = \xi + i\zeta$, $\varphi_0 \in H_\alpha$, является решением краевой задачи $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$.

Теорема 4.6. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве L_p $(1 < p \leq 2)$, коэффициенты a, b, h, f всюду, за исключением точки $t = 1$, удовлетворяют условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$, в точке $t = 1$ функции a и b имеют разрыв первого рода, а $(t-1)^\delta \varphi_0(t)$, $(\delta = \xi + i\zeta)$ $-$ решение краевой задачи $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$. Тогда при n таких, что $q = A(n^{-\alpha} + n^{-\Theta} + n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)}) < 1$ $(\Theta = \xi$ при $\xi > 0$, $\Theta = 1 - |\xi|$ при $\xi \leq 0)$, система уравнений (4.3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq A(n^{-\alpha} +$
$+n^{\Theta} + n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)})$, где x^* $-$ решение уравнения (4.1).

Замечание. В случае, когда $\xi > 0$, приведенные теоремы допускают усиление: при $\xi > 0$ можно положить $\Theta = 1$.

Приближенное решение уравнения (4.2) ищем в виде полинома (2.3), коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$L_n x_n \equiv \bar{P}_n[\bar{e}(t)x_n(t) + \bar{c}(t)S_\gamma(x_n(\tau)) + S_\gamma(P_n^\tau[\bar{r}(t,\tau)x_n(\tau)])] =$$

$$= \bar{P}_n(t), \tag{4.8}$$

где $\bar{e}(t) = e(t)$, $\bar{c}(t) = c(t)$, при $t \in L$, $\bar{r}(t,\tau) = k(t,\tau)$ при $t,\tau \in L$; $\bar{e}(t) = 1$, $\bar{c}(t) = 0$, при $t \notin L$, $\bar{r}(t,\tau) = 0$ при t, или $\tau \notin L$, $c(t) = k(t,t)$, $r(t,\tau) = (k(t,\tau) - k(t,t))/(\tau - t)$.

Теорема 4.7. Пусть оператор L непрерывно обратим в пространстве L_2 и краевая задача $\Phi^+(t) = (a(t) - k(t,t))/(a(t) + k(t,t))\Phi^-(t)$ на контуре L имеет решение вида $(t - c_1)^{\eta_1 + i\Theta_1}(t - c_2)^{\eta_2 + i\Theta_2}\omega(t)$. Тогда при n таких, что $q = A[n^{-\alpha}\ln n + n^{|\eta|-1}] < 1$ $(\eta = \max(|\eta_1|, |\eta_2|))$, система уравнений (4.8) имеет единственное решение x_n^* и $\|x^* - x_n^*\| \le Aq$, где x^* – решение уравнения (4.2).

4.2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 4.1. Уравнения (4.1), (4.3) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$K^{(1)}x \equiv x^+(t) - G(t)x^-(t) + s(t)U_\gamma(h(t,\tau)d(t,\tau)x(\tau)) = f(t); \quad (4.9)$$

$$K_n^{(1)}x_n \equiv \overline{P}_n\left[x_n^+(t) - G(t)x_n^-(t) + s(t)U_\gamma\left(\overline{P}_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)]\right)\right] = $$
$$= \overline{P}_n[s(t)f(t)]. \quad (4.10)$$

В книге [66] приведено решение краевой задачи $\psi^+(t) = G(t)\psi^-(t)$

$$\psi^+(t) = (t-1)^\delta \psi_1^+(t), \quad \psi^-(t) = \left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta \psi_1^-(t),$$

где $\psi_1^\pm(t)$ – решение краевой задачи $\psi_1^+(t) = G(t)\left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta \frac{1}{(t-1)^\delta}\psi_1^-(t)$ с непрерывным коэффициентом $G(t)\left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta \frac{1}{(t-1)^\delta}$.

Подставляя в уравнения (4.9) и (4.10) вместо функции $G(t)$ отношение $\psi^+(t)/\psi^-(t)$, приходим к эквивалентным краевым задачам:

$$K^{(2)}x \equiv x^+(t)\psi^-(t) - \psi^+(t)x^-(t) + \psi^-(t)s(t)U_\gamma(h(t,\tau)d(t,\tau)x(\tau)) = $$
$$= s(t)\psi^-(t)f(t), \quad (4.11)$$

$$K_n^{(2)}x_n \equiv \overline{P}_n[\psi^-(t)x_n^+(t) - \psi^+(t)x_n^-(t) +$$
$$+\psi^-(t)s(t)U_\gamma(\overline{P}_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] = \overline{P}_n[s(t)\psi^-(t)f(t)]. \quad (4.12)$$

Так как $\psi^-(t)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера с показателем λ_1 и обращающаяся в нуль в точке c, то $\psi^-(t)s(t) \in H_{\lambda_1}$. Введем полином

$$z_n(t) = \psi_n^-(t)x_n^+(t) - \psi_n^+(t)x_n^-(t) + T_n[\psi^-(t)s(t)U_\gamma(h(t,\tau)d(t,\tau))],$$

$\psi_n = T_n[\psi]$. Возвращаясь к выкладкам, сделанным в §2, убеждаемся в справедливости следующих неравенств: $\|K^{(2)}x_n - z_n\| \leq A\|x_n\|/n^{\lambda_1-\beta}$, $\|\overline{P}_nK^{(2)}x_n - K_n^{(2)}x_n\| \leq A\|x_n\|(n^{-(\lambda_1-\beta)} + n^{-\beta})\ln n$.

Из этих оценок и теории приближенных методов анализа следует, что при n таких, что $q = A(n^{-(\lambda_1-\beta)} + n^{-\beta})\ln n < 1$, система уравнений (4.3) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq Aq$, где x^* и x_n^* – решения уравнений (4.1) и (4.3). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.2 является объединением доказательств теорем 4.1 и 2.2.

Доказательство теоремы 4.3. Уравнение (4.1) эквивалентно краевой задаче (4.9). Во всех точках контура γ, кроме узла c, функцию $G(t)$ можно представить в виде соотношения $G(t) = \psi^+(t)/\psi^-(t) =$
$= (t-1)\psi^+(t)/(t-1)\psi^-(t)$. Подставляя в уравнения (4.9) и (4.10) вместо $G(t)$ указанное выше соотношение, приходим к уравнениям:

$$K^{(3)}x \equiv (t-1)\psi^-(t)x^+(t) - (t-1)\psi^+(t)x^-(t) + (t-1)\psi^-(t)s(t)\times$$

$$\times U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)) = (t-1)\psi^-(t)s(t)f(t), \tag{4.13}$$

$$K_n^{(3)}x_n \equiv \overline{P}_n[(t-1)\psi^-(t)x_n^+(t) - (t-1)\psi^+(t)x_n^-(t) + (t-1)\psi^-(t)s(t)\times$$

$$\times U_\gamma(\overline{P}_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] = \overline{P}_n[(t-1)\psi^-(t)s(t)f(t)]. \tag{4.14}$$

Уравнения (4.9) и (4.13) эквивалентны. Это следует из того, что каждое решение уравнения (4.9) является и решением уравнения (4.13). Обратно, каждое решение уравнения (4.13) превращает уравнение (4.9) при $t \neq 1$ в тождество. Так как под решением уравнения (4.1) понимается функция, обращающая его в тождество всюду, кроме точки $t = 1$, то эквивалентность уравнений (4.9) и (4.13) доказана. Эквивалентность уравнений (4.6) и (4.14) очевидна.

Введем полином $z_n(t)$ по формуле

$$z_n(t) = tT_n^*\left[\frac{t-1}{t}\psi^-(t)\right]x_n^+(t) - T_n\left((t-1)\psi^+(t)\right)x_n^-(t) +$$

$$+T_n\left[(t-1)\psi^-(t)s(t)U_\gamma\left(h(t,\tau)d(t,\tau)x(\tau)\right)\right].$$

Поясним построение полинома $T_n^*[(t-1)\psi^-(t)/t]$. Пусть $T_n[(t-1)\psi^-(t)/t]$ – полином наилучшего равномерного приближения функции $(t-1)\psi^-(t)/t$ в области D^-. Тогда $T_n[(t-1)\psi^-(t)/t]$ имеет вид $\sum\limits_{k=-n}^{0}\alpha_k t^k$. Так как разность $(t-1)\psi^-(t)/t - T_n[(t-1)\psi^-(t)/t]$ является аналитической в области γ^-, то максимальное и минимальное значения она принимает на окружности γ. Поэтому свободный член в представлении $T_n[(t-1)\psi^-(t)/t]$ не превосходит $E_n((t-1)\psi^-(t)/t)$. Отбрасывая его, получаем полином $T_n^*[(t-1)\psi^-(t)/t] \in X_n$. Нетрудно видеть, что

$$\|K^{(3)}x_n - z_n\| \leq A\|x_n\|n^{-\lambda_2+\beta}\ln n;$$

$$\|\overline{P}_n K^{(3)} x_n - z_n\| \leq A\|x_n\| n^{-(\lambda_2-\beta)} \ln n. \qquad (4.15)$$

Теперь нужно оценить величину $I = K_n^{(3)} x_n - \overline{P}_n K^{(3)} x_n$. Представим $\|I\|$ в виде $\|I\| = \|I_1\| + \|I_2\| + \ldots + \|I_5\|$, где

$$I_1 = \overline{P}_n[(t-1)s(t)\psi^-(t)U_\gamma(h(t,\tau)(x_n(\tau) - \bar{x}_n(\tau))|\tau - t|^{-\eta})],$$

$$I_2 = \overline{P}_n[(t-1)s(t)\psi^-(t)U_\gamma(h(t,\tau)\bar{x}_n(\tau)[|\tau - t|^{-\eta} - d(t,\tau)])],$$

$$I_3 = \overline{P}_n\left[(t-1)s(t)\psi^-(t)\sum_{k=0}^{2n}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(h(t,\tau) - h(t,t_k))\bar{x}_n(\tau)d(t,\tau)d\tau\right],$$

$$I_4 = \overline{P}_n\left[(t-1)s(t)\psi^-(t)\sum_{k=0}^{2n}{}'h(t,t_k)\left[\varphi_n^+(t_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(\tau-1)^\delta(|\tau - t|^{-\eta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. -|t_k - t|^{-\eta})d\tau + \varphi_n^-(t_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^\delta(|\tau - t|^{-\eta} - |t_k - t|^{-\eta})d\tau\right]\right],$$

$$I_5 = \overline{P}_n\left[(t-1)s(t)\psi^-(t)\sum_{k=0}^{2n}{}'h(t,t_k)\left[\varphi_n^+(t_k)|t_k - t|^{-\eta}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}[(\tau-1)^\delta - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(t_k-1)^\delta]d\tau + \varphi_n^-(t)|t_k - t|^{-\eta}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^\delta - \left(\frac{t_k-1}{t_k}\right)^\delta\right]d\tau\right]\right].$$

Пусть $x_n(t) = (t-1)^\delta\varphi_n^+(t) + \left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta\varphi_n^-(t)$. Тогда через $\bar{x}_n(t)$ обозначим функцию, равную $(t-1)^\delta\varphi_n^+(t_k) + \left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta\varphi_n^-(t_k)$ в промежутке $[t_k, t_{k+1})$; $\sum\limits_k{}'h(t_j,t_k)$ означает суммирование по $k \neq j$.

Можно показать, что $\|I_1\| \leq A\|x_n\|n^{-\beta}\ln n$; $\|I_2\| \leq A\|x_n\|n^{-(1-\eta)}\ln n$; $\|I_3\| \leq A\|x_n\|n^{-\alpha}\ln n$.

Оценим

$$|I_4'| = \left|\overline{P}_n\left[(t-1)s(t)\psi^-(t)\sum_{k=0}^{2n}{}'h(t,t_k)\varphi_n^+(t_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(\tau-1)^\delta\left(|\tau - t|^{-\eta} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -|t_k - t|^{-\eta}\right)d\tau\right]\right| \leq A\ln n\left|\sum_{k=0}^{2n}{}'\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(\tau-1)^\delta\left||\tau - t|^{-\eta} - |t_k - t|^{-\eta}\right|d\tau\times\right.$$

$$\left.\times\max|\varphi_n^+| \leq An^{1+\eta+|\xi|}\right|\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k^{1+\eta}}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}|\tau - t_k|\,d\tau\left|\max|\varphi_n^+|\ln n \leq\right.$$

$$\leq An^{-(1-\eta+\xi)}\|x_n\|\ln n.$$

Аналогично

$$|I_4''| = \left|\bar{P}_n\left[(t-1)s(t)\psi^-(t)\sum_{k=0}^{2n}{}'h(t,t_k)\varphi_n^-(t_k)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{t_k}^{t_k+1}\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^\delta\left(|\tau-t|^{-\eta}-|t_k-t|^{-\eta}\right)d\tau\right]\right|\leq An^{-(1-\eta+\xi)}\|x_n\|\ln n;$$

$$|I_5|\leq An^{-(1-\eta-\xi)}\ln n\|x_n\|.$$

Собирая вместе оценки $I_1,\dots,I_5$, имеем:

$$\|I\| = \|K_n^{(3)}-\overline{P}_nK^{(3)}\|\leq A\left(n^{-\lambda_2}+n^{-\beta}\right)\ln n. \tag{4.16}$$

Из оценок (4.15)−(4.16) и общей теории приближенных методов анализа следует справедливость теоремы.

Доказательство теоремы 4.4. В подпространстве X_n^*, состоящем из функций $x_n(t)=x_n^+(t)-x_n^-(t)$, определенных выражением (4.5), уравнения (4.1) и (4.7) эквивалентны следующим:

$$K^{(4)}x_n\equiv\varphi_n^+(t)-G(t)\left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta(t-1)^{-\delta}\varphi_n^-(t)+$$

$$+(t-1)^{-\delta}s(t)U_\gamma\left[h(t,\tau)|\tau-t|^{-\eta}x_n(\tau)\right]=(t-1)^{-\delta}s(t)f(t),$$

$$K_n^{(4)}x_n\equiv\overline{P}_n\left[\varphi_n^+(t)-G(t)\left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta(t-1)^{-\delta}\varphi_n^-(t)+\right.$$

$$\left.+(t-1)^{-\delta}s(t)U_\gamma\left[\bar{P}_n^\tau\left[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)\right]\right]\right]=\bar{P}_n\left[(t-1)^{-\delta}s(t)f(t)\right].$$

Функция $G_1(t)=G(t)\left(\frac{t-1}{t}\right)^\delta(t-1)^{-\delta}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. Повторяя сделанные при доказательстве предыдущей теоремы выкладки, убеждаемся в справедливости теоремы 4.4.

Доказательство теоремы 4.5. Пусть решение краевой задачи $\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$ имеет вид $(t-1)^\delta\varphi_0(t)$, где $\varphi_0(t)\in H_\alpha$ $(t\in(\gamma\backslash 1))$, $\delta=\xi+i\zeta$. При обосновании предложенной вычислительной схемы необходимо различать два случая: а) $\xi>0$ и б) $\xi\leq 0$.

Проведем обоснование в случае "а". Уравнения (4.1) и (4.3) эквивалентны краевым задачам (4.11) и (4.12). Введем полином

$$\varphi_n(t)=\psi_n^-(t)x_n^+(t)-\psi_n^+(t)x_n^-(t)+T_n\left[\psi^-(t)s(t)U_\gamma\left(h(t,\tau)d^*(t,\tau)x_n(\tau)\right)\right],$$

где $\psi_n(t) = T_n[\psi]$, $d^*(t,\tau) = \rho^{-\eta}$ при $|\tau - t| \leq \rho$, $d^*(t,\tau) = |\tau - t|^{-\eta}$ при $|\tau - t| > \rho$. Повторяя рассуждения, сделанные в §3, можно показать, что

$$\|K^{(2)}x_n - \varphi_n\| + \|\bar{P}_n(K^{(2)}x_n - \varphi_n)\| \leq$$

$$\leq A\left(n^{-\alpha} + n^{-\alpha}\rho^{1-\eta} + \rho^{-2\eta}n^{-\eta} + n^{-\xi}\right)\|x_n\|,$$

$$\|\bar{P}_nK^{(2)}x_n - K_n^{(2)}x_n\| \leq A\left(n^{-\alpha} + \rho^{-2\eta}n^{-\eta}\right)\|x_n\|.$$

Полагая $\rho = n^{-\eta/(1+\eta)}$, получаем, что при n таких, что

$$q = A\left(n^{-\alpha} + n^{-\xi} + n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)}\right) < 1,$$

система уравнений (4.3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq Aq$, где x^* − решение уравнения (4.1). Приближенное решение с. и. у. (4.1) в случае "а" обосновано.

Перейдем к случаю "б". Функцию $G(t)$ можно представить в виде $G(t) = (t-1)\Phi^+(t)/(t-1)\Phi^-(t)$, где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ − решения краевой задачи $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$. Уравнения (4.1) и (4.3) эквивалентны краевым задачам

$$K^{(5)}x \equiv t\left((t-1)/t\right)\Phi^-(t)x^+(t) - (t-1)\Phi^+(t)x^-(t) +$$

$$+(t-1)\Phi^-(t)s(t)U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)\right) = (t-1)\Phi^-(t)s(t)f(t)$$

и

$$K_n^{(5)}x_n \equiv \bar{P}_n\left[t\left((t-1)/t\right)\Phi^-(t)x_n^+(t) - (t-1)\Phi^+(t)x_n^-(t) +\right.$$

$$\left.+(t-1)\Phi^-(t)s(t)U_\gamma\left(\bar{P}_n^\tau\left[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)\right]\right)\right] = \bar{P}_n\left[(t-1)\Phi^-(t)d(t)f(t)\right].$$

Введем полином

$$\varphi_n(t) = tT_n^*\left[\frac{t-1}{t}\Phi^-(t)\right]x_n^+(t) - T_n\left[(t-1)\Phi^+(t)\right]x_n^-(t) +$$

$$+T_n\left[(t-1)\Phi^-(t)s(t)U_\gamma\left(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x_n(\tau)\right)\right].$$

Можно показать, что

$$\|K^{(5)}x_n - \varphi_n| \leq A\left(n^{-\alpha} + n^{-\alpha}\rho^{1-\eta} + \rho^{-2\eta}n^{-\eta} + n^{-(1-|\xi|)}\right)\|x_n\|,$$

$$\|\bar{P}_nK^{(5)}x_n - K_n^{(5)}x_n\| \leq A\left(n^{-\alpha} + \rho^{-2\eta}n^{-\eta}\right)\|x_n\|.$$

Полагая $\rho = n^{-\eta/(1+\eta)}$, получаем, что при n таких, что $q = A(n^{-\alpha} +$

$+n^{-(1-|\xi|)}+n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)}) < 1$, система уравнений (4.3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^*-x_n^*\| \le Aq$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.6. Введем уравнение

$$K^{(6)}x \equiv a(t)x(t) + b(t)S_\gamma\left(x(\tau)\right) + U_\gamma\left(h(t,\tau)d^*(t,\tau)x(\tau)\right) = f(t), \tag{4.17}$$

где $d^*(t,\tau) = |\tau - t|^{-\eta}$ при $|\tau - t| \ge \rho$, $d^*(t,\tau) = \rho^{-\eta}$ при $|\tau - t| < \rho$ (величина ρ фиксируется ниже), и оценим норму разности

$$\|Kx - K^{(6)}x\| = \left|\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} h(e^{is},e^{i\sigma})\left(|e^{i\sigma}-e^{is}|^{-\eta} - d^*(e^{is},e^{i\sigma})\right)x(e^{i\sigma})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times e^{i\sigma}d\sigma\right|^p ds\right|^{1/p} \le \left|\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}|h(e^{is},e^{i\sigma})|\left||e^{i\sigma}-e^{is}|^{-\eta} - d^*(e^{is}e^{i\sigma})\right|^{1/q}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left||e^{i\sigma}-e^{is}|^{-\eta} - d^*(e^{is},e^{i\sigma})\right|^{1-1/q}|x(e^{i\sigma})|d\sigma\right|^p ds\right|^{1/p} \le A\rho^{1-\eta}\|x\|.$$

При ρ таких, что $q = A\rho^{1-\eta} < 1$, оператор $K^{(6)}$ непрерывно обратим и справедливо неравенство $\|[K^{(6)}]^{-1}\| \le A/(1-q)$.

Метод механических квадратур для уравнения (4.17) в операторной форме записывается следующим образом:

$$K_n^{(6)}x_n \equiv \bar{P}_n\left[a(t)x_n(t) + b(t)S_\gamma\left(x_n(\tau)\right) + \right.$$
$$\left. + U_\gamma\left(\bar{P}_n^\tau\left[h(t,\tau)d^*(t,\tau)x_n(\tau)\right]\right)\right] = \bar{P}_n\left[f(t)\right]. \tag{4.18}$$

Решение краевой задачи $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ имеет вид $(t-1)^\delta\varphi(t)$, где $\delta = \xi + i\zeta$, $\varphi \in H_\alpha$. Рассмотрим отдельно два случая: а) $\xi > 0$ и б) $-1 < \xi \le 0$.

Остановимся вначале на случае "a". Представим уравнения (4.17) и (4.18) в виде краевых задач

$$K^{(7)}x \equiv Vx + Wx = y, \quad K_n^{(7)}x_n \equiv V_nx_n + W_nx_n = y_n,$$

где операторы V, W, V_n, W_n и функции y, y_n определены в § 2. Введем полином $\varphi_n(t) = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^- + U_\gamma\left(T_n^t\left[\ell(t)h(t,\tau)d^*(t,\tau)\right]x_n(\tau)\right)$. Можно показать, что $\|K^{(7)}x_n - \varphi_n\| \le A\left(n^{-\alpha} + n^{-\eta}/\rho^{-2\eta} + n^{-\xi}\right)\|x_n\|$. Для простоты выкладок полагаем, что $\eta q < 1$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Покажем теперь, что аналогичная оценка справедлива и для величины $\|\bar{P}_nK^{(7)}x_n - \varphi_n\|$. Очевидно,

$$\|\bar{P}_n\left[U_\gamma\left(D_n^t\left[\ell(t)h(t,\tau)d^*(t,\tau)\right]x_n(\tau)\right)\right]\| =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \left| \bar{P}_n \left[U_\gamma \left(D_n^t \left[l(t) h(t,\tau) d^*(t,\tau) \right] x_n(\tau) \right) \right] d\tau \right|^p dt \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{\pi i} \left[\int\limits_{\gamma} \left| \bar{P}_n \left[U_\gamma \left(D_n^t \left[\ell(t) h(t,\tau) d^*(t,\tau) \right] x_n(\tau) \right) \right] \right|^2 d\tau dt \right]^{p/2} \left[\int\limits_{\gamma} d\tau \right]^{\frac{2-p}{p}} \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq A \left[\int\limits_{\gamma} \left| \bar{P}_n \left[U_\gamma \left(D_n^t \left[l(t) h(t,\tau) d^*(t,\tau) \right] x_n(\tau) \right) d\tau \right]^2 dt \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq A(n^{-\alpha} + n^{-\eta}\rho^{-2\eta} + n^{-\xi})\|x_n\|.$$

Здесь $D_n^t = I - T_n^t$. Из полученных оценок следует, что при n и ρ таких, что $q_2 = \max(q_1,\ A(n^{-\alpha} + n^{-\eta}\rho^{-2\eta} + n^{-\xi})) < 1$, оператор $K_n^{(7)}$ непрерывно обратим, причем $\|[K_n^{(7)}]^{-1}\| \leq \|[K^{(6)}]^{-1}\|/(1 - q_2)$.

Так как уравнения $K_n^{(6)} x_n = f_n$ и $K_n^{(7)} x_n = y_n$ эквивалентны, то оператор $K_n^{(6)}$ непрерывно обратим. Норму оператора $[K_n^{(6)}]^{-1}$ можно оценить, повторяя выкладки, неоднократно проделанные выше.

Введя обозначение $b(t,\tau) = d^*(t,\tau) - d(t,\tau)$, оценим величину:

$$\|K_n x_n - K_n^{(6)} x_n\| = \|\bar{P}_n \left[l(t) U_\gamma \left(P_n^\tau \left[h(t,\tau) b(t,\tau) x_n(\tau) \right] \right) \right] \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \bar{P}_n^s \bar{P}_n^\sigma \left[\ell(e^{is}) h(e^{is}, e^{i\sigma}) b(e^{is}, e^{i\sigma}) x_n(e^{i\sigma}) \right] e^{i\sigma} d\sigma \right|^p ds \right|^{1/p} \leq$$

$$\leq \max \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \bar{P}_n^s \bar{P}_n^\sigma \left[\ell(e^{is}) h(e^{is}, e^{i\sigma}) b(e^{is}, e^{i\sigma}) \right] \right| d\sigma \right]^{1/q} \times$$

$$\times \max \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \bar{P}_n^s \bar{P}_n^\sigma \left[\ell(e^{is}) h(e^{is}, e^{i\sigma}) b(e^{is}, e^{i\sigma}) \right] \right| ds \right]^{1/p} \|x_n\| = I_1 I_2 \|x_n\|.$$

Нетрудно видеть,что

$$I_1 = \max_s \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \bar{P}_n^s \bar{P}_n^\sigma \left[l(e^{is}) h(e^{is}, e^{i\sigma}) b(e^{is}, e^{i\sigma}) \right] \right| d\sigma \right]^{1/q} =$$

$$= \max_s \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{2n} \left[\sum_{k=0}^{2n} l(e^{is_j}) h(e^{is_j}, e^{is_k}) b(e^{is_j}, e^{is_k}) \psi_k(\sigma) \right] \psi_j(s) \right| d\sigma \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq A \ln n \max_{s_j} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{2n} l(e^{is_j}) h(e^{is_j}, e^{is_k}) b(e^{is_j}, e^{is_k}) \psi_k(\sigma) \right| d\sigma \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq A \ln n \max_{s_j} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=j-\nu}^{j+\nu} l(e^{is_j}) h(e^{is_j}, e^{is_k}) b(e^{is_j}, e^{is_k}) \psi_k(\sigma) \right| d\sigma \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq A \left[\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=-\nu}^{\nu}{}' \frac{n^\eta}{k^\eta} \psi_k(\sigma) \right| d\sigma \right]^{1/q} \ln n.$$

Здесь $\nu = [\rho(2n+1)/2\pi] + 1$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq 0$. Так как $\int\limits_0^{2\pi} |\psi_k(\sigma)|\, d\sigma \leq A \ln n / n$, то

$$A \left[\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{k=-\nu}^{\nu}{}' n^\eta k^{-\eta} \psi_k(\sigma) \right| d\sigma \right]^{1/q} \ln n \leq A \left[\sum_{k=-\nu}^{\nu}{}' n^\eta k^{-\eta} \int\limits_0^{2\pi} |\psi_k(\sigma)| d\sigma \right]^{1/q} \ln n \leq$$

$$\leq A[n^{\eta-1}(\nu^{1-\eta} - 1)]^{1/q} (\ln n)^{1+1/q} \leq A\rho^{(1-\eta)q} (\ln n)^{1+1/q}.$$

Из полученных неравенств следует оценка $I_1 \leq A\rho^{(1-\eta)/q} \ln^{(q+1)/q} n$.

Оценка выражения I_2 проводится аналогично, и в результате имеем неравенство $I_2 \leq A\rho^{(1-\eta)/p} \ln^{(p+1)/p} n$.

Следовательно, $\|K_n x_n - K_n^{(6)} x_n\| \leq A\rho^{1-\eta} \|x_n\| \ln^2 n$.

Из полученных оценок, полагая для определенности $\rho = n^{-\alpha/(1+\alpha-\eta)}$, получаем, что при n таких, что $q = A \left[n^{-\xi} + n^{-\frac{\alpha(1-\eta)}{1+\alpha-\eta}} + n^{-\frac{\eta(1-\eta)}{1+\eta}} \right] \ln^2 n < 1$, система уравнений (4.3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq Aq$, где x^* – решение уравнения (4.1).

В случае "а" теорема доказана.

Обоснование исследуемой вычислительной схемы в случае "б" является объединением сделанных выше выкладок и рассуждений из второй части доказательства теоремы 4.5. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.7 принципиально не отличается от доказательства теоремы 4.5.

5. Исключительные случаи сингулярных интегральных уравнений

В предыдущих параграфах рассматривались с.и.у.

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int\limits_\gamma h(t,\tau) x(\tau) d\tau = f(t)$$

нормального вида [125], т.е. предполагалось выполнение условия $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ на контуре γ.

В случае, когда условие нормальности нарушается в конечном числе точек, при ряде дополнительных условий построены и обоснованы приближенные методы проекционного типа [73], [135] для решения с.и.у.

Большое число прикладных задач сводится к различным классам с.и.у., у которых условие нормальности нарушается во всей области определения уравнений.

М.М. Лаврентьев [109], [110] выделил следующие классы с.и.у., у которых условие нормальности нарушается во всей области определения уравнений:

$$x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau_1, t_2) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t_1, \tau_2) d\tau_2}{\tau_2 - t_2} = f(t_1, t_2), \tag{5.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau_1 - t_1} - \frac{1}{\tau_2 - t_2} \right) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2), \tag{5.3}$$

и поставил задачу исследования единственности их решения. Эта задача решалась в работе автора [29], где выделен ряд классов единственности решений и исследована их устойчивость.

В этом параграфе даны приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений, у которых нарушено условие нормальности на многообразиях меры, большей чем нуль. Полученные при этом результаты распространяются и на уравнения (5.1) − (5.3).

5.1. Методы регуляризации характеристических сингулярных интегральных уравнений

С характеристическими с. и. у.

$$K^0 x \equiv a(t)x(t) + b(t)S_\gamma(x(\tau)) = f(t) \tag{5.4}$$

и эквивалентными им краевыми задачами

$$L\varphi \equiv \varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t) + g(t) \tag{5.5}$$

приходится сталкиваться при решении многих задач. Рассмотрим исключительный случай уравнений (5.4) и (5.5) − случай, когда $a^2 - b^2$ может обращаться в нуль, и случай, когда функция $G(t)$ может принимать значения, равные нулю и бесконечности.

Вначале займемся краевой задачей (5.5). Пусть функция $G(t)$ представима в виде $G(t) = G_1(t)G_2(t)$, где $G_1(t)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера и не обращающаяся в нуль на контуре γ, а $G_2(t)$ – функция, обращающаяся в нуль на некотором многообразии, принадлежащем γ, причем изменение аргумента функции $G_2(t)$ при обходе контура γ не превосходит π. Из условий, наложенных на функцию $G_2(t)$, следует, что найдется такое комплексное число α, что $|\alpha G_2(t)-1| \leq 1$. Решение уравнения (5.5) будем искать методом итерации

$$\psi_{n+1}(t) = \alpha_n\psi_n(t)+(1-\alpha_n)\left[(\alpha G_2(t) - 1)\left(-\frac{1}{2}\psi_n(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\psi_n(\tau)\ d\tau}{\tau - t}\right) + \right.$$

$$\left. +g^*(t)\right], \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon_1 < 1. \tag{5.6}$$

При переходе от уравнения (5.5) к итерационной схеме (5.6) была сделана замена переменных $\psi^+(t) = \varphi^+(t)\delta^+(t)$, $\psi^-(t) = \alpha^{-1}\varphi^-(t)\delta^-(t)$ и осуществлен переход к уравнению $\psi^+(t) = \alpha G_2(t)\psi^-(t) + g^*(t)$. Здесь $G_1(t) = \frac{\delta^-(t)}{\delta^+(t)}$, $g^*(t) = \delta^+(t)g(t)$. Затем, вычитая из обеих частей последнего уравнения функцию $\psi^-(t)$, имеем:

$$\psi(t) = (\alpha G_2(t) - 1)\psi^-(t) + g^*(t).$$

Заменив здесь функцию $\psi^-(t)$ на функцию

$$-\frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{\tau - t},$$

окончательно получаем уравнение:

$$\psi(t) = (\alpha G_2(t) - 1)\left(-\frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\psi(\tau)\, d\tau}{\tau - t}\right) + g^*(t).$$

Применив к этому уравнению метод последовательных приближений, изученный в статье Л. И. Обломской [127], приходим к методу последовательных приближений (5.6). Анализируя этот метод в метрике $L_2(\gamma)$, убеждаемся, что так как

$$\left\|(\alpha G_2(t) - 1)\left(-\frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau\right)\right\|_{L_2} = 1,$$

то выполнены условия теоремы Л. И. Обломской и итерационный процесс (5.6) сходится к решению уравнения (5.5), если последнее существует.

Проведем дискретизацию итерационного метода (5.6). Обозначим через $\tilde{\psi}(t)$ полином $\tilde{\psi}(t) = \sum\limits_{k=-m}^{m} \alpha_k t^k$. Вместо итерационной схемы (5.6) имеем

$$\tilde{\psi}_{n+1}(t) = \alpha_n \tilde{\psi}_n(t) + (1-\alpha_n) P_m \left[(\alpha G_2(t) - 1) \left(-\frac{1}{2} \tilde{\psi}_n(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\tilde{\psi}_n(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \right) + g^*(t) \right]. \tag{5.7}$$

Легко проверить, что

$$\left\| P_m \left[(\alpha G_2(t) - 1) \left(-\frac{1}{2} \tilde{\psi}_n(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\tilde{\psi}_n(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \right) \right] \right\|_{L_2} = 1.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Л. И. Обломской и итерационный процесс (5.7) сходится к одному из решений уравнения $\tilde{\psi}(t) = P_m \left[(\alpha G_2(t) - 1)\, \tilde{\psi}^- + g^*(t) \right]$, если они существуют.

Перейдем к с. и. у. (5.4). В книге [82] исследовалась применимость метода простой итерации к уравнению (5.4) при минимальных ограничениях на гладкость исходных данных и на условия обращения $a^2(t) - b^2(t)$ в нуль на γ. Для этого была предложена замена $x = \lambda x_1 + \mu S_\gamma x_1$, $\lambda^2 \neq \mu^2$, и было показано, что при условиях $vrai \max\limits_{t \in \gamma} \left| \frac{z+\delta}{z\delta+1} \right| \leq q < 1$ ($z = a/b$, $\delta = \lambda/\mu$) метод простой итерации сходится к решению уравнения

$$x_1 = (a\mu + b\lambda)(a\lambda + b\mu)^{-1} S_\gamma x_1 + f(a\lambda + b\mu)^{-1}, \tag{5.8}$$

полученного из (5.4) указанной выше заменой.

После того, как уравнение (5.4) было сведено к уравнению (5.8), применим к последнему итерационный метод

$$x_1^{n+1} = \alpha_n x_1^n + (1-\alpha_n) \left(f(a\lambda + b\mu)^{-1} + (a\mu + b\lambda)(a\lambda + b\mu)^{-1} S_\gamma x_1^n \right). \tag{5.9}$$

При условии $vrai \max\limits_{t \in \gamma} \left| \frac{z+\delta}{z\delta+1} \right| \leq 1$ итерационный процесс (5.9) сходится к одному из решений уравнения (5.4) (при условии, что оно разрешимо).

При решении краевой задачи (5.5) можно воспользоваться методом регуляризации А. Н. Тихонова. Предположим, что уравнение (5.5) имеет решение $\varphi^*(t)$, причем $vrai \max |\varphi^{*\pm}(t)| \leq K =$

const. Кроме того, предположим, что существует семейство функций $R(t,\lambda)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) функции $R(t,\lambda)$ не обращаются в нуль при всех значениях $0 < \lambda \leq \lambda_0$; 2) изменение аргумента функции $R(t,\lambda)$ не превышает величины $\pi - \delta(\lambda)$, где $\delta(\lambda) > 0$, при всех λ из интервала $0 < \lambda \leq \lambda_0$; 3) справедливо соотношение $\|R(t,\lambda) - G_2(t)\|_{L_2}\gamma(\lambda)/(1 - \max\limits_t |R(t,\lambda)\gamma(\lambda) - 1|) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Здесь $\gamma(\lambda)$ – комплексное число, такое, что справедливы неравенства $-(\pi - \delta(\lambda))/2 < \arg[\gamma(\lambda)R(t,\lambda)] < (\pi - \delta(\lambda))/2$. Существование такого числа следует из условий 1, 2.

В качестве регуляризированного возьмем уравнение

$$\psi^+(t) = R(t,\lambda)\psi^-(t) + g^*(t), \tag{5.10}$$

где $\psi^+(t) = \varphi^+(t)\delta^+(t)$, $\psi^-(t) = \gamma(\lambda)^{-1}\varphi^-(t)\delta^-(t)$, $G_1(t) = \delta^-(t)/\delta^+(t)$,
$g^*(t) = g(t)\delta^+(t)$.

Покажем, что при выполнении условий 1 и 2 уравнение (5.10) имеет единственное решение, которое может быть получено методом простой итерации $\psi_{n+1}(t) = (R(t,\lambda)\gamma(\lambda) - 1)\,\psi_n^-(t) + g^*(t)$.

Из теоремы Банаха следует, что оператор

$$K_\lambda\psi = \psi(t) - (R(t,\lambda)\gamma(\lambda) - 1)\left(-\frac{1}{2}\psi(t) + \frac{1}{2}S_\gamma(\psi(t))\right)$$

имеет линейный обратный с нормой удовлетворяющей неравенству $\|K_\lambda^{-1}\| \leq (1 - \max\limits_t |R(t,\lambda)\gamma(\lambda) - 1|)^{-1}$.

Покажем, что на множестве существенно ограниченных функций оператор K_λ является регуляризующим. Пусть $\psi^\pm(t) \in L_\infty$. Представим уравнение (5.5) в виде $L\psi \equiv \psi^+(t) = G_2(t)\gamma(\lambda)\psi^-(t) + g^*(t)$, где $\psi^+ = \varphi^+\delta^+$, $\psi^- = \gamma^{-1}(\lambda)\varphi^-\delta^-$. Тогда

$$\|K_\lambda^{-1}L\psi - \psi\|_{L_2} = \|K_\lambda^{-1}(L\psi - K_\lambda\psi)\|_{L_2} \leq \|K_\lambda^{-1}\|\,\|L\psi - K_\lambda\psi\|_{L_2} \leq$$
$$\leq \|K_\lambda^{-1}\|\,\|(R(t,\lambda) - G_2(t))\,\gamma(\lambda)\varphi^-(t)\|_{L_2} \leq$$
$$\leq \|K_\lambda^{-1}\|\,\|R(t,\lambda) - G_2(t)\|_{L_2} vrai\max|\psi^-(t)|.$$

Из условия 3 следует, что $\|K_\lambda^{-1}L\psi - \psi\|_{L_2} \to 0$. Это доказывает, что оператор K_λ является регуляризующим на множестве существенно ограниченных функций.

5.2. Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях на замкнутых контурах

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int\limits_{\gamma} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \qquad (5.11)$$

где $t \in \gamma$, $a^2(t) - b^2(t)$ может обращаться в нуль на γ, $b(t) \neq 0$, $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости. Будем полагать, что $a(t), b(t) \in H_\alpha$, $h(t,\tau) \in H_{\alpha\alpha}$.

Перейдем сначала с помощью преобразования Гильберта от уравнения (5.11) к следующему уравнению:

$$a(e^{is})x(e^{is}) - \frac{ib(e^{is})}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma +$$

$$+ i \int\limits_0^{2\pi} h(e^{is}, e^{i\sigma}) x(e^{i\sigma}) e^{i\sigma} d\sigma + \frac{b(e^{is})}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x(e^{i\sigma}) d\sigma = f(e^{is}), \ 0 \leq s < 2\pi. \qquad (5.12)$$

Для простоты обозначений вместо (5.12) будем рассматривать уравнение

$$a(s)x(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x(\sigma) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = f(s). \qquad (5.13)$$

Построим вычислительную схему для решения уравнения (5.13). Для этого выберем сетку узлов

$$s_k = \frac{\pi k}{n}, \ s_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, \ 0 < h < \frac{\pi}{2n}, \ k = 0, \ldots, 2n.$$

Параметр h определяется ниже.

Решение будем искать в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \psi_k(s),$$

где $\psi_k(s)$ - фундаментальные полиномы по узлам s_k^*, $k = 0, 1, \ldots, 2n$,

$$\psi_k(s) = \begin{cases} 0, \ s = s_l^*, \ l \neq k; \\ 1, \ s = s_k^*. \end{cases}$$

Построим квадратурную формулу для вычисления сингулярного интеграла из уравнения (5.13) при $s \in [s_j, s_{j+1})$ в виде

$$Sx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(s_k^*) \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + R_n. \qquad (5.14)$$

К уравнению (5.13) применим метод коллокации, воспользовавшись квадратурной формулой (5.14) и принимая за узлы коллокации s_k^*, $k = 0, \dots, 2n-1$. При этом получим систему уравнений

$$a(s_j^*)x(s_j^*) + \frac{b(s_j^*)}{2\pi} \sum_{k=0, k\neq j-1, j+1}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} h(s_j^*, s_k^*)x(s_k^*) = f(s_j^*),\ j = 0, \dots, 2n-1. \qquad (5.15)$$

Докажем, что полученная система имеет единственное решение. Для этого воспользуемся теоремой Адамара.

Обозначим для краткости $a_j = a(s_j^*)$, $b_j = b(s_j^*)$, $h_{jk} = h(s_j^*, s_k^*)$. Рассмотрим диагональные элементы матрицы системы (5.15)

$$|c_{jj}| = \left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{s_{j+1} - s_j^*}{2}}{\sin \frac{s_j - s_j^*}{2}} \right| + \frac{h_{jj}}{2n} \right| =$$

$$= \left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} \right| + \frac{h_{jj}}{2n} \right|.$$

Так как $b_j \neq 0$ при $j = 0, \dots, 2n-1$, то выбором h коэффициенты c_{jj} могут быть сделаны как угодно большими. С другой стороны, имеем

$$\sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1} |c_{jk}| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1} |h_{jk}| + \frac{|b_j|}{2\pi} \sum_{k=0,k\neq j,j-1,j+1}^{2n-1} \left| \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1} |h_{jk}| + \frac{|b_j|}{2\pi} \sum_{k=0,k\neq j,j-1,j+1}^{2n-1} \frac{\pi}{2|k-j|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1} |h_{jk}| + \frac{|b_j|}{4} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{j-k} + \sum_{k=j+1}^{2n} \frac{1}{k-j} \right) \leq$$

$$\leq A + B \ln n.$$

Таким образом, условия теоремы Адамара выполняются и система (5.15) имеет единственное решение.

Оценим погрешность замены сингулярного интеграла из уравнения (5.13) квадратурной формулой (5.14). Предварительно покажем, что для каждого узла s_j^*, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$, существует такая функция $\psi(s)$, что

$$\psi(s_j^*) = x(s_j^*)$$

и
$$\int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} \psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} \psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma = 0. \qquad (5.16)$$

При этом контур $[0, 2\pi]$ будем считать закольцованным, т.е. нуль отождествляется с 2π.

В качестве простейшего представителя функции $\psi(\sigma)$ можно взять прямую
$$\psi(\sigma) = x(s_j^*) + k(\sigma - s_j^*), \qquad (5.17)$$
где $k = -\frac{nx(s_j^*)}{2\pi}\ln\frac{sin\frac{h}{2}}{sin\frac{\pi}{n}-\frac{h}{2}}\frac{sin\frac{2\pi}{n}-\frac{h}{2}}{sin\frac{\pi}{n}+\frac{h}{2}}$. Нетрудно видеть, что $k = 0$ при $s_j^* = (s_j + s_{j+1})/2$.

Тогда погрешность квадратурной формулы (5.14) оценивается неравенством
$$2\pi\left|R_n\right| \leq \left|\sum_{k=0,k\neq j-1,j+1}^{2n-1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}\left[(x(\sigma) - (x(s_k^*)\right]\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j}(x(\sigma) - \psi(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}}(x(\sigma) - \psi(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| \leq$$
$$\leq \left|\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}}(x(\sigma) - x(s_j^*))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| +$$
$$+ \left|\sum_{k=0,k\neq j,j-1,j+1}^{2n-1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}(x(\sigma) - x(s_j^*))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_{s_{j-1}}^{s_j}(x(\sigma) - x(s_j^*))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_{s_{j-1}}^{s_j}(\psi(s_j^*) - \psi(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| + \left|\int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}}(x(\sigma) - x(s_j^*))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}}(\psi(\sigma) - \psi(s_j^*))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| = I_1 + \cdots + I_6.$$

Оценим каждое из слагаемых $I_1 \div I_6$ в отдельности: $I_1 \leq An^{-\alpha}$; $I_2 \leq An^{-\alpha}\ln n$; $I_3 + I_4 \leq An^{-\alpha}$; $I_5 + I_6 \leq Akn^{-1}$.

Таким образом, при h таких, что $k \le n^{1-\alpha}$, имеем $R_n \le An^{-\alpha}\ln n$. Пусть уравнение (5.13) при правой части f имеет единственное решение $x^* \in H_\alpha, 0 < \alpha \le 1$. Было показано, что при достаточно малых h, таких что выполняются условия теоремы Адамара, система (5.15) имеет единственное решение x_n^*. Обозначим через K_n оператор, описываемый системой уравнений (5.15) в пространстве R_{2n}, а через K – оператор, описываемый уравнением (5.13). Обозначим через P_n оператор, проектирующий пространство $X = H_\beta$ $(0 < \beta < \alpha)$ на интерполяционные многочлены по узлам s_k^*, $k = 0, 1 \ldots, 2n-1$. Тогда

$$x_n^* - P_n x^* = K_n^{-1}(K_n(x_n^* - P_n x^*)) =$$

$$= K_n^{-1}(P_n f - K_n P_n x^*) = K_n^{-1}(P_n K x^* - K_n P_n x^*) =$$

$$= K_n^{-1}(P_n K x^* - P_n K P_n x^*) + K_n^{-1}(P_n K P_n x^* - P_n K_n P_n x^*).$$

Переходя к норме в пространстве R_{2n}, имеем:

$$||x_n^* - P_n x^*|| \le A||x^* - P_n x^*|| \ln^2 n + A\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \le A\frac{\ln^3 n}{n^\alpha}.$$

Таким образом,

$$||x^* - x_n^*|| \le ||x^* - P_n x^*|| + ||P_n x^* - x_n^*|| \le A\frac{\ln^3 n}{n^\alpha}.$$

Теорема 5.1 [50]. Пусть уравнение (5.13) имеет единственное решение $x^*(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$. Существуют такие значения h, что система уравнений (5.15) имеет единственное решение $x_n^*(t)$, и при h таких, что коэффициент k прямой (5.16) по модулю меньше или равен $n^{1-\alpha}$, справедлива оценка $||x^* - x_n^*|| \le A\frac{\ln^3 n}{n^\alpha}$.

Замечания. 1. Если уравнение (5.13) имеет несколько решений, то, как видно из доказательства теоремы, последовательность x_n^* при $n \to \infty$ стремится к одному из этих решений.

2. Выше в качестве функции $\psi(\sigma)$ была выбрана прямая (5.16). Можно подобрать функции $\psi(\sigma)$ таким образом, что условие теоремы 5.1 будет выполнено при гораздо менее сильных ограничениях на h. Пусть, например, $0 < h < \pi/(2n)$. Тогда в качестве $\psi(\sigma)$ можно взять, например, функцию

$$\psi(\sigma) = \begin{cases} x(s_j^*), & \sigma \in [s_j, s_{j+1}], \\ x(s_j^*) + A_1|\sigma - s_j|^{\gamma_1}, & \sigma \in [s_{j-1}, s_j], \\ x(s_j^*) + A_2|\sigma - s_j|^{\gamma_2}, & \sigma \in [s_{j+1}, s_{j+2}], \\ 0 & \text{при остальных значениях } \sigma. \end{cases}$$

Здесь A_i и $\gamma_i, i = 1, 2$, подбираются таким образом, чтобы

$$\int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} \psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} \psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma = 0.$$

Отметим, что в качестве $\psi(\sigma)$ можно взять разрывные функции.

5.3. Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях на разомкнутых контурах

Рассмотрим сингулярные интегральные уравнения вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int\limits_{-1}^{1} h(t,\tau)d\tau = f(t), \ -1 < t < 1, \quad (5.18)$$

где $f(t)$, $a(t)$, $b(t) \in H_\alpha$, $h(t) \in H_{\alpha\alpha}$, функция $b(t) \neq 0$, $a^2(t) - b^2(t)$ может обращаться в нуль на многообразиях с мерой, большей нуля.

Выберем узлы

$$t_k = -1 + \frac{k}{n}, \ k = 0, \dots, 2n, \ t_j^* = t_j + h, \ j = 1, 2, \dots, n-1, \ t_j^* = t_{j+1} - h,$$

$j = n, n+1, \dots, 2n-2$, $0 < h < \frac{1}{2n}$. Параметр h определяется ниже.

Построим квадратурную формулу для интеграла

$$I_2 x = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau. \quad (5.19)$$

Эта формула при $t \in [t_j, t_{j+1}), j = 1, 2, \dots, 2n-2$, имеет вид:

$$I_2 x = R_N + \begin{cases} \int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t}d\tau + \sum\limits_{k=2, k\neq j-1, j+1}^{2n-3} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t}d\tau + \\ \quad + \int\limits_{t_{2n-2}}^{1} \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t}d\tau, \ j \neq 1, 2n-2; \\ \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t}d\tau + \sum\limits_{k=3}^{2n-3} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t}d\tau + \\ \quad + \int\limits_{t_{2n-2}}^{1} \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t}d\tau, \ j = 1; \\ \int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t}d\tau + \sum\limits_{k=2}^{2n-4} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t}d\tau + \\ \quad + \int\limits_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t}d\tau, \ j = 2n-2. \end{cases} \quad (5.20)$$

Заменим в уравнении (5.18) сингулярный интеграл по квадратурной формуле (5.20), а интеграл в смысле Римана – по формуле прямоугольников и к полученному выражению применим метод коллокации с узлами t_k^*, $k = 1, \dots, 2n-2$. Тогда получим систему уравнений следующего вида:

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi}\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*}d\tau + \sum_{k=2, k\neq j-1, j+1}^{2n-2} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*}d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{2n-2}}^{1} \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t_j^*}d\tau\right) + \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} h(t_j^*, t_k^*)x(t_k^*) = f(t_j^*), \ j = \overline{2, 2n-3};$$

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*}d\tau + \sum_{k=3}^{2n-3} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*}d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{2n-2}}^{1} \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t_j^*}d\tau\right) + \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} h(t_j^*, t_k^*)x(t_k^*) = f(t_j^*), \ j = 1;$$

$$a(t_j^*)x(t_j^*) + \frac{b(t_j^*)}{\pi}\left(\int\limits_{t_0}^{t_2} \frac{x(t_1^*)}{\tau - t_j^*}d\tau + \sum_{k=2}^{2n-4} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{x(t_k^*)}{\tau - t_j^*}d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} \frac{x(t_{2n-1}^*)}{\tau - t_j^*}d\tau\right) + \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} h(t_j^*, t_k^*)x(t_k^*) = f(t_j^*), \ j = 2n-2. \quad (5.21)$$

Докажем, что система (5.21) имеет единственное решение. Для этого воспользуемся критерием Адамара. Для краткости введем обозначения $a_j = a(t_j^*)$, $b_j = b(t_j^*)$, $h_{jk} = h(t_j^*, t_k^*)$. Обозначим через c_{jk}, $j, k = 1, \dots, 2n-2$, элементы матрицы C системы (5.21).

Рассмотрим диагональные элементы матрицы C

$$|c_{jj}| = \left|a_j + \frac{b_j}{\pi}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{d\tau}{\tau - t_j^*} + \frac{h_{jj}}{2n}\right| \leq \left|a_j + \frac{b_j}{\pi}\ln\frac{t_{j+1} - t_j^*}{t_j^* - t_j}\right| + \left|\frac{h_{jj}}{n}\right| =$$

$$= \left|a_j + \frac{b_j}{\pi}\ln\frac{\frac{1}{n} - h}{h}\right| + \left|\frac{h_{jj}}{n}\right|.$$

Так как $b_j \neq 0, j = 1 \dots, 2n-2$, то выбором h эта величина может быть сделана как угодно большой.

С другой стороны, при $j \neq 1, 2n-2$ имеем

$$\sum_{k=1,k\neq j}^{2n-1}|c_{jk}|\leq A\left(\left|\int\limits_0^{t_2}\frac{d\tau}{\tau-t_j^*}\right|+\sum_{k=2,k\neq j,j-1,j+1}^{2n-2}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{\tau-t_j^*}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\int\limits_{t_{2n-2}}^{1}\frac{d\tau}{\tau-t_j^*}\right|\right)+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1}|h_{jk}|\leq$$

$$\leq A\left(\ln\frac{t_j^*-t_0}{t_j^*-t_{j-1}}+\ln\frac{t_{2n}-t_j^*}{t_{j+2}-t_j^*}\right)+D\leq E\ln n+D.$$

В остальных случаях оценки аналогичные. Таким образом, условия теоремы Адамара выполняются, и система (5.21) имеет единственное решение.

Оценим погрешность замены сингулярного интеграла в уравнении (5.18) квадратурной формулой (5.20).

Для этого подберем для каждого узла t_j^*, $j=1,\ldots,2n-2$, функцию $\psi(t)$, такую, что

$$\psi(t_j^*)=x(t_j^*),\ \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\psi(\tau)\frac{1}{\tau-t_j^*}d\tau+\int\limits_{t_{j+1}}^{t_{j+2}}\psi(\tau)\frac{1}{\tau-t_j^*}d\tau=0. \qquad (5.22)$$

Будем полагать, что для каждого j функция $\psi(t)=x(t_j^*)+k(t-t_j^*)$ задает прямую, определяемую условиями (5.22). Здесь

$$k=-\frac{x(t_j)n}{2}\ln\frac{h(2/n-h)}{(1/n+h)(1/n-h)}. \qquad (5.23)$$

Тогда, полагая для определенности $j\neq 1,2n-2$, получим:

$$|R_n|\leq\left|\int\limits_{-1}^{t_2}\frac{x(\tau)-x(t_1^*)}{\tau-t_j^*}d\tau+\int\limits_{t_{2n-2}}^{1}\frac{x(\tau)-x(t_{2n-1}^*)}{\tau-t_j^*}d\tau+\right.$$

$$+\sum_{k=2,k\neq j-1,j+1}^{2n-2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(x(\tau)-x(t_k^*))\frac{d\tau}{\tau-t_j^*}+$$

$$\left.+\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{(x(\tau)-\psi(\tau))d\tau}{\tau-t_j^*}+\int\limits_{t_{j+1}}^{t_{j+2}}\frac{(x(\tau)-\psi(\tau))d\tau}{\tau-t_j^*}\right|\leq$$

$$\leq\left|\int\limits_{-1}^{t_2}\frac{x(\tau)-x(t_1^*)}{\tau-t_j^*}d\tau\right|+\left|\int\limits_{t_{2n-2}}^{1}\frac{x(\tau)-x(t_{2n-1}^*)}{\tau-t_j^*}d\tau\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}(x(\tau)-x(t_j^*))\frac{d\tau}{\tau-t_j^*}\right|+\sum_{k=3,k\neq j,j-1,j+1}^{2n-1}\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(x(\tau)-x(t_k^*))\frac{d\tau}{\tau-t_j^*}\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{(x(\tau)-\psi(\tau))d\tau}{\tau-t_j^*}\right|+\left|\int\limits_{t_{j+1}}^{t_{j+2}}\frac{(x(\tau)-\psi(\tau))d\tau}{\tau-t_j^*}\right|=r_1+\cdots+r_6.$$

Оценив каждое слагаемое в отдельности, по аналогии с проведенными выше оценками для интегралов с ядром Гильберта, имеем:

$$R_N\le An^{-\alpha}+Akn^{-1}+\frac{A}{n^\alpha}\ln\left(\frac{(t_{2n}-t_j^*)\cdot(t_j^*-t_0)}{h^2}\right).$$

По аналогии с доказательством теоремы 5.1, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 5.2 [50]. Пусть уравнение (5.18) имеет единственное решение $x^*(t)\in H_\alpha$, $0<\alpha\le 1$. Существуют такие значения h, что система уравнений (5.21) имеет единственное решение $x_n^*(t)$, и если h такое, что коэффициент k (5.23) по модулю меньше или равен $n^{-\alpha+1}$, то справедлива оценка $\|x^*(t)-x_n^*(t)\|\le A\frac{\ln^3 n}{n^\alpha}$.

Замечание. В случае уравнений на отрезке справедливы замечания, сделанные выше к теореме 5.1.

6. Приближенное решение нелинейных сингулярных интегральных уравнений

Параграф посвящен проекционным методам решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений различных видов. Обоснование проводится в пространствах Гельдера и L_2

6.1. Проекционные методы решения нелинейных уравнений на замкнутых контурах интегрирования.

Рассмотрим нелинейное с.и.у.

$$Kx \equiv a(t, x(t)) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau = f(t), \tag{6.1}$$

где $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат.

Вычислительная схема 1. Приближенное решение уравнения (6.1) ищем в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k, \tag{6.2}$$

коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$a(t_j, x_n(t_j)) + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} {}' h(t_j, t_k, x_n(t_k)) \left(1 - i\text{ctg} \frac{s_k - s_j}{2}\right) -$$

$$- \frac{2i}{2n+1} h'_u(t_j, t_j, x_n(t_j)) x'_{ns}(e_j^{is}) = f(t_j), \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n), \tag{6.3}$$

где $t_j = exp(is_j)$, $s_j = 2\pi j/(2n+1)$, $\sum'$ означает суммирование по $k \neq j$, а x'_{ns} означает взятие производной по s.

Теорема 6.1 [10], [13], [17]. Пусть уравнение (6.1) имеет в некоторой сфере S единственное решение x^*, существует линейный оператор $[K'(x^*)]^{-1}$ и выполнены условия: $x^*(t)$, $f(t) \in H_\alpha$, $a(t, u)$, $a'_u(t, u)$, $a''_u(t, u) \in H_{\alpha,1}$, $h(t, \tau, u)$, $h'_u(t, \tau, u)$, $h''_u(t, \tau, u) \in H_{\alpha,\alpha,1}$, где $0 < \alpha \leq 1$, $|u| < \infty$. Тогда при n таких, что

$$q = An^{-(\alpha/2 - \beta)} \ln^5 n < 1, \tag{6.4}$$

система уравнений (6.3) имеет решение x_n^* и в метрике пространства $X = H_\beta(\beta < \alpha)$, выполняется неравенство

$$\|x^* - x_n^*\| \leq An^{-(\alpha/2 - \beta)} \ln^2 n. \tag{6.5}$$

Вычислительная схема 2. Приближенное решение уравнения (6.1) в предположении, что $a(t, x(t)) = a(t)x(t)$, ищется в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \psi_k(s), \tag{6.6}$$

коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$a(t_j, x_n(\bar{t}_j)) + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} h(t_j, t_k, \alpha_k) \left(1 - i\mathrm{ctg}\frac{2(k-j)\pi - \pi}{4n+2}\right) =$$

$$= f(t_j), \ j = 0, 1, \ldots, 2n, \tag{6.7}$$

где $t_j = \exp(is_j)$, $\psi_k(s) = \frac{1}{2n+1}(\sin\frac{2n+1}{2}(s - s_k))/\sin\frac{s-s_k}{2}$, $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $\bar{t}_k = e^{i\bar{s}_k}$, $\bar{s}_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}$.

Теорема 6.2 [13], [17], [28]. Пусть уравнение (6.1) имеет в некоторой сфере S единственное решение $x^*(t)$, существует ограниченный правый обратный оператор $[K'(x)]_r^{-1}(x \in S)$ и выполнены условия $a(t), f(t), x^*(t) \in H_\alpha$, $h(t, \tau, u)$, $h'_u(t, \tau, u) \in H_{\alpha,\alpha,1}$ $0 < \alpha \leq 1, |u| < \infty$. Тогда при n таких, что

$$q = A \ln^2 n / n^{\alpha - \beta} < 1, \tag{6.8}$$

система уравнений (6.7) имеет единственное решение x_n^* и в метрике пространства $X = H_\beta(0 < \beta < \alpha^2/4)$ справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leq A n^{-(\alpha/2 - \beta)} \ln^2 n. \tag{6.9}$$

Вычислительная схема 3. Приближенное решение уравнения (6.1) ищется в виде полинома (6.6), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из уравнения

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[a(t, x_n(t)) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma P_n^\tau \left[\frac{h(t, \tau, x_n(\tau))}{\tau - t}\right] d\tau\right] = \bar{P}_n[f(t)]. \tag{6.10}$$

Напомним, что через $\bar{P}_n$ обозначен проектор на множество тригонометрических интерполяционных полиномов порядка n по узлам $\bar{t}_k = e^{i\bar{s}_k}$, $\bar{s}_k = (2k+1)\pi/(2n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Теорема 6.3 [13], [17], [28]. Пусть уравнение (6.1) имеет в некоторой сфере S единственное решение $x^*(t)$, существует ограниченный правый обратный оператор $[K'(x)]_r^{-1}(x \in S)$ и выполнено одно из следующих условий:

а) $x^*(t) \in W^r H_\alpha, a(t, u) \in W^{r,r+1} H_{\alpha,1}$, $h(t, \tau, u) \in W^{r,r,r+1} H_{\alpha,\alpha,1}$, б) функции $x^*(t)$, $a(t,x^*(t))$, $h(t,\tau,x^*(\tau))$,– аналитические в областях $R_1<|t|<R_2$, $R_1<|t|$, $|\tau|<R_2$, где $R_1<1$, $R_2>1$.

Тогда, если выполнено условие "а", то при n таких, что $q=An^{-r-\alpha+2\beta}\ln^6 n<1$, система уравнений (6.10) имеет решение x_n^* и в метрике пространства $X=H_\beta(0<\beta<(r+\alpha)/2)$ справедлива оценка $\|x^*-x_n^*\|\le An^{-r-\alpha+\beta}\ln^2 n$. Если же выполнено условие "б", то при n таких, что $q=A[R_1^{n+1}+R_2^{-n-1}]n^{2\beta}\ln^6 n<1$, система уравнений (6.10) имеет решение x_n^* и $\|x^*-x_n^*\|\le A[R_1^{n+1}+R_2^{-n-1}]n^\beta\ln^2 n$.

В ряде случаев более предпочтительным является рассмотрение нелинейных с.и.у. в пространстве L_2. Будем искать приближенное решение уравнения (6.1) с помощью итерационного процесса

$$x_n^{m+1}=x_n^m-[\|K_nx_n^m\|^2/\|K_n'(x_n^0)K_nx_n^m\|^2][K_n'(x_n^0)]^*K_nx_n^m, \qquad (6.11)$$

где

$$K_nx_n\equiv\bar{P}_n[a(s,x_n(s))-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma\left[h(s,\sigma,x_n(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma[h(s,\sigma,x_n(\sigma))]d\sigma-f(s)],\quad x_n^0(s)=P_n[x^0(s)], \qquad (6.12)$$

$x^0(s)$– достаточно хорошее приближение к решению x^* уравнения (6.1), $x_n(s)$ - тригонометрический полином степени не выше n, $a(s)=$
$=a(e^{is}),\quad h(s,\sigma)=h(e^{is},e^{i\sigma}),\quad x_n(s)=x_n(e^{is})$.

Пусть выполнены следующие условия: а) функции $a(t,x^0(t))$, $f(t)$, $x^0(t)$, $h(t,\tau,x^0(\tau))$, или аналитические в кольце $R_1\le|t|$, $|\tau|\le R_2$, $R_1<1$, $R_2>1$, или имеют производные до r порядка по всем переменным, причем r производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем α; б) в некоторой сфере, определенной ниже,

$$\max_{t,\tau\in\gamma}\{|h_u'(t,\tau,u_1)-h_u'(t,\tau,u_2)|,|h^*(t,\tau,u_1)-h^*(t,\tau,u_2)|\}\le F(u_1,u_2\in S),$$

где $h^*(t,\tau,u)=[h_u''(t,\tau,u)-h_u''(\tau,\tau,u)]/(|\tau-t|^\beta\exp(i\Theta_1))$, β - произвольное число, $0<\beta<\alpha$, $\Theta_1=\Theta_1(\tau,t)=\arg|\tau-t|$.

Введем обозначения: $\delta_0=\|Kx_0-f\|$, $\tilde{\delta}_0=\|K_nx_n^0\|$, $B_0=\|[K_n'(x_n^0)]^{-1}\|$, $B_*=\max\{\|K'(x^0)\|,\ \|K_n'(x_n^0)\|\}$. Существование констант B_0, $\|K'(x_n^0)\|$ и их связь с величинами $\|[K'(x^0)]^{-1}\|$ и $\|K'(x^0)\|$ будут установлены ниже.

Теорема 6.4 [17], [28]. Пусть в сфере $S[x : \|x - x^0\| \le r]$, $r = B_* B_0^2 \tilde{\delta}_0/(1-q) + A \ln n E_n(x^0)$, $q = AFB_*B_0^2 + \sqrt{(1 - B_*^{-2}B_0^{-2})} < 1$, выполнены условия "a" и оператор $K'(x^0)$ имеет линейный обратный (достаточно существования левого обратного). Тогда при n таких, что $p = A\ln^2 n \max(E_n(a), E_n(x^0), E_n(\psi), E_n(h'_u(t,t,x_n^0(t))), E_n^{t,\tau}(h'_u(t,\tau,x_n^0(\tau)))) < 1$, уравнение $K_n x_n = 0$ имеет в S единственное решение x_n^*, к которому сходится итерационный процесс (6.11) со скоростью $\|x_n^* - x_n^m\| \le q^m \tilde{\delta}_0 B_*(1-q)$. Расстояние между x_n^* и решением x^* уравнения (6.1) оценивается неравенствами

$$\|x^* - x_n^*\| \le A \ln^2 n \max(E_n(a), E_n(\psi), E_n(f), E_n^{t,\tau}(h(t,\tau,x_n^*(\tau))),$$

$$\|x^* - x_n^*\| \le B_* \tilde{\delta}_0/(1-q) + E_n(x_0), \tag{6.13}$$

где $\psi(z) = exp\{\Gamma(z)\}$, $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\tau - z)^{-1} lnG(\tau)d\tau$,

$G(t) = (a(t) - h'_u(t,t,x_n^0(t))/(a(t) + h'_u(t,t,x_n^0(t))).$

Доказательство теоремы 6.1. Приближенное решение ищем в подпространстве $X_n \subset X$ полиномов вида (6.2). При выполнении условий теоремы оператор K имеет производную Фреше

$$K'(x)z \equiv a'_u(t,x(t))z(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} h'_u(t,\tau,x(\tau))z(\tau)(\tau - t)^{-1}d\tau, \tag{6.14}$$

удовлетворяющую в сфере $S(x^*, r)$ с произвольным радиусом r условию Липшица $\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \le A(r)\|x_1 - x_2\|$.

Система уравнений (6.3) в операторной форме записывается в виде выражения

$$K_n(x_n) \equiv P_n[a(s,x_n(s)) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}{}' h(s,s_k,x_n(s_k))\psi_k(\sigma)d\sigma -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n\left[[h(s,s,x_n(\sigma)) - h(s,s,x_n(s))]\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\right]d\sigma -$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}{}'\left\{[h(s,s_k,x_n(s_k)) - h(s,s,x_n(s_k))]\mathrm{ctg}\frac{s_k - s}{2}\psi_k(\sigma)\right\}\Bigg]d\sigma =$$

$$= P_n[f(s)].$$

Через $a(s,x_n(s))$ обозначена функция $a(e^{is}, x_n(e^{is}))$. Аналогично определяются функции $h(s,s_k,x_n(s_k))$, $f(s)$. Здесь $\psi_k(\sigma)$ - фундаментальные тригонометрические полиномы по узлам $s_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = 0,1,\ldots,2n$.

Нетрудно видеть, что производная Фреше оператора K_n имеет вид

$$K_n'(x_n)z_n \equiv P_n[a_u'(s,x_n(s))z_n(s) - I_1(x_n) - I_2(x_n) + I_3(x_n)],$$

где через $I_1(x_n)$, $I_2(x_n)$, $I_3(x_n)$, соответственно обозначены операторы

$$\frac{i}{2\pi}P_n\{\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}{}'\{[h_u'(s,s_k,x_n(s_k)) - h_u'(s,s,x_n(s_k))]z_n(s_k)\text{ctg}\frac{s_k-s}{2}\}]\psi_k(\sigma)d\sigma\};$$

$$\frac{i}{2\pi}P_n\{\int\limits_0^{2\pi}P_n^{\sigma}\{[h_u'(s,s,x_n(\sigma))z_n(\sigma) - h_u'(s,s,x_n(s))z_n(s)]\text{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\}d\sigma\};$$

$$\frac{1}{2\pi}P_n\{\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}{}'[h_u'(s,s_k,x_n(s_k))z_n(s_k)]\psi_k(\sigma)d\sigma\}.$$

Покажем, что производная Фреше K_n' удовлетворяет условию Липшица

$$\|K_n'(x_n') - K_n'(x_n'')\| \le An^{\beta}\ln^2 n\|x_n' - x_n''\|. \qquad (6.15)$$

Доказательство приведем лишь для I_2 (для I_1 и I_3 доказательство намного проще, нежели для I_2). В книге [126] показано, что $\sum\limits_{k=0}^{2n}|\psi_k(s) \le A\ln n$. Поэтому

$$|I_2(x_n') - I_2(x_n'')| \le A\ln n\{\max_{0\le j\le 2n}\frac{2\pi}{2n+1}|\sum_{k=0}^{2n}{}'\{[h_u'(s_j,s_j,x_n'(s_k)) -$$

$$-h_u'(s_j,s_j,x_n''(s_k))]z_n(s_k) - [h_u'(s_j,s_j,x_n'(s_j)) -$$

$$-h_u'(s_j,s_j,x_n''(s_j))]z_n(s_j)\}\text{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} + \frac{4}{2n+1}|[h_u''(s_j,s_j,x_n'(s_j))x_n'(s_j) -$$

$$-h_u''(s_j,s_j,x_n''(s_j))x_n''(s_j)]z_n(s_j)| + \frac{4}{2n+1}|[h_u'(s_j,s_j,x_n'(s_j)) -$$

$$-h_u'(s_j,s_j,x_n''(s_j))]z_n'(s_j)|\} \le A\ln n[I_4 + I_5 + I_6].$$

Оценим $|I_4|$

$$|I_4| \le A|x_n' - x_n''||z_n|\sum_{k=1}^{n}k^{-1} \le A\|x_n' - x_n''\|\|z_n\|\ln n.$$

Известно следующее неравенство М. Рисса [192]. Если $f(s)$– тригонометрический полином степени не выше n, то $|f'(s)| \le$

$n\max\limits_s|f(s+$
$+\pi/2n)-f(s)|/2$. Пользуясь этим неравенством, получаем оценки $|I_5|\leq A\|x_n'-x_n''\|\|z_n\|n^{-\beta}$, $\|I_6\|\leq A\|x_n'-x_n''\|\|z_n\|n^{-\beta}$.

Так как $((I_2(x_n')-I_2(x_n''))-$ тригонометрический полином степени n, то $|(I_2(x_n')-I_2(x_n'')|\leq An^{\beta}\ln n\|x_n'-x_n''\|\|z_n\|$. Теперь нетрудно убедиться в справедливости (6.15).

Из включения $x^*(t)\in H_\alpha$ следует существование такого полинома $x_n^0(t)\in X_n$, что $\|x^*-x_n^0\|\leq An^{-(\alpha-\beta)}$. Покажем, что из существования линейного оператора $[K'(x^*)]^{-1}$ следует существование линейного оператора $[K_n'(x_n^0)]^{-1}$. Пусть $\|[K'(x^*)]^{-1}\|=B_0$. Тогда из теоремы Банаха следует при n таких, что $q=An^{-(\alpha-\beta)}<1$, существование оператора $[K'(x_n^0)]^{-1}$ с нормой $\|[K'(x_n^0)]^{-1}\|\leq B_0/(1-q)$. В §2 показано, что при n таких, что $q=A\ln n/n^{\alpha-\beta}<1$, оператор $K_{1n}'(x_n^0)$, где $K_{1n}'(x_n^0)z_n\equiv P_n[a_u'(t,x_n^0(t))z_n(t)+S_\gamma[h_u'(t,\tau,x_n^0(\tau))z_n(\tau)]]$, имеет линейный обратный с нормой $\|[K_{1n}'(x_n^0)]^{-1}\|\leq A\ln n$. Для доказательства существования линейного оператора $[K_n'(x_n^0)]^{-1}$ нужно оценить $\|[K_n'(x_n^0)-K_{1n}'(x_n^0)\|$. Вначале оценим

$$\|J\|=\|P_n\left[\int\limits_0^{2\pi}R_n^\sigma[h_u'(s,s,x_n^0(\sigma))z_n(\sigma)-h_u'(s,s,x_n^0(s))z_n(s)]\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma\|,$$

где $R_n=I-P_n$. Построим для функции $h_u'(s,s,x_n^0(\sigma))$ интерполяционный полином степени n по переменной σ и по узлам $s_k=2k\pi(2n+1)^{-1}$, $k=0,1,\dots,2n$. Этот полином будем обозначать через $h_n(s,s,\sigma)$. Замечая, что $[h_n(s,s,\sigma)z_n(\sigma)-h_n(s,s,s)z_n(s)]\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}$ по переменной σ является полиномом степени не выше $2n$, получаем $\|J\|\leq\|J_1\|+\|J_2\|$, где

$$J_1=P_n\left[\int\limits_0^{2\pi}\left[h_u'(s,s,x_n^0(\sigma))-h_n(s,s,\sigma)\right]z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right],$$

$$J_2=\sum_{k=0}^{2n}S_k(s)\psi_k(s),$$

$$S_k(s)=\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma[[[h_u'(s_k,s_k,x_n^0(\sigma))-h_n(s_k,s_k,\sigma)]z_n(\sigma)-[h_u'(s_k,s_k,x_n^0(s_k))-$$

$$-h_n(s_k,s_k,s_k)]z_n(s_k)]\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s_k}{2}]d\sigma.$$

Очевидно $\|J_1\| \le A\ln^2 n\|z_n\|/n^{\alpha-\beta}$,

$$|S_k(s)| \le \frac{4\pi}{2n+1}\{|[h''_u(s_k,s_k,x_n^0(s_k))x_n^{0'}(s_k) - h'_{n\sigma}(s_k,s_k,s_k)]z_n(s_k)|+$$

$$+|h'_u(s_k,s_k,x_n^0(s_k)) - h_n(s_k,s_k,s_k)]z'_n(s_k)|\} = \frac{4\pi}{2n+1}(|J_3|+|J_4|) =$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1}|J_3|,$$

так как $J_4 = 0$ по определению полинома $h_n(s,s,\sigma)$.

Приступим к оценке $|J_3|$. Функция $h'_u(s,s,x_n^0(\sigma))$ имеет производную по σ, входящую в класс H_α с коэффициентом An. Это следует из условий теоремы и неравенства М. Рисса.

Легко показать, что $|J_3| \le An^{1-\alpha}\|z_n\|\ln n$.

Из последних двух неравенств следует, что $|S_k(s)| \le A\|z_n\|n^{-\alpha}\ln n$ и, следовательно, $\|J_2\| \le A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)}$. Отсюда и из оценки $\|J_1\|$ имеем $\|J\| \le A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)}$.

Теперь оценим

$$\|J_5\| = \|\frac{i}{2\pi}P_n\left[\int\limits_0^{2\pi}\left[h'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma)) - h'_u(s,s,x_n^0(\sigma))\right]z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma\|-$$

$$-I_1(x_n^0) \le A\ln n\|\int\limits_0^{2\pi}[[h'_u(s,\sigma,x_n(\sigma)) - h^*_n(s,\sigma,x_n(\sigma))] - [h'_u(s,s,x_n^0(\sigma)) -$$

$$-h^*_n(s,s,x_n^0(\sigma))]]z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\|+$$

$$+\left\{\|P_n[\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}{}'[[h'_u(s,s_k,x_n^0(s_k)) - h^*_n(s,s_k,x_n^0(s_k))]-\right.$$

$$-[h'_u(s,s,x_n^0(s_k)) - h^*_n(s,s,x_n^0(s_k))]]z_n(s_k)\psi_k(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{s_k-s}{2}d\sigma]\|+$$

$$\left.+\|\sum_{k=0}^{2n}\frac{2i}{2n+1}[h^*_n(s_k,\sigma,x_n^0(s_k))]'_{\sigma=s_k}z_n(s_k)\psi_k(\sigma)\|\right\} = \|J_6\|+\|J_7\|,$$

где $h^*_n(s,\sigma,x_n^0(\nu))$ — интерполяционный тригонометрический полином степени $[n/2]$ по переменной σ и по узлам $s_k(k = 0,1,\ldots,2[n/2])$ для функции $P^\nu_{[n/2]}[h(s,\sigma,x_n^0(\nu))]$, т.е. $h^*(s,\sigma,x_n^0(\nu)) = = P^\sigma_{[n/2]}P^\nu_{[n/2]}[h(s,\sigma,x_n^0(\nu))]$.

Нетрудно видеть, что $\|J_6\| \leq A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)}$.

Воспользовавшись неравенством М. Рисса, получаем: $\|J_7\| \leq A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)}$. Из оценок $\|J_6\|$ и $\|J_7\|$ следует, что $\|J_5\| \leq A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)}$. Оценка

$$\|P_n[\int\limits_0^{2\pi} h'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))z_n(\sigma)d\sigma] - I_3(x_n^0)\| \leq A\ln n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)} \quad (6.16)$$

получается без труда. Из оценок $\|J\|$, $\|J_5\|$ и неравенства (6.16) следует, что

$$\|K'_{1n}(x_n^0) - K'_n(x_n^0)\| \leq A\ln^2 n/n^{\alpha-\beta}.$$

Так как оператор $K'_{1n}(x_n^0)$ непрерывно обратим, то, применяя теорему Банаха, получаем, что при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)}\ln^2 n < 1$, оператор $K'_n(x_n^0)$ имеет линейный обратный с нормой $\|(K'_n(x_n^0))^{-1}\| \leq$
$\leq A\ln n$. Отметим, что $\|K_n x_n^0\| \leq \|K_n x_n^0 - Kx_n^0\| + \|Kx_n^0 - Kx^*\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\ln n$. В сфере $S[x : \|x - x_n^0\| \leq A\ln^2 n/n^{\alpha-\beta}]$ при n таких, что $q = \frac{A\ln n}{n^{\alpha-\beta}} < 1$, выполнены все условия теоремы 6.5 из введения, из которой следует существование решения $x_n^*(t)$ уравнения (6.3) и справедливость оценки $\|x^* - x_n^*\| \leq A\ln^2 n/n^{\alpha-\beta}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6.2. Обоснование вычислительной схемы 2 проводится в пространстве $X = H_\beta \quad (\beta < \alpha/4)$ и его подпространстве X_N, состоящем из полиномов вида (6.2).

Повторяя выкладки, сделанные при доказательстве предыдущей теоремы, можно показать, что оператор K имеет производную Фреше

$$K'(x)z \equiv a(t)z(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma h'_u(t,\tau,x(\tau))z(\tau)(\tau-t)^{-1}d\tau,$$

удовлетворяющую в сфере $\|x - x^0\| \leq r$ условию Гельдера $\|K'(x_1)-$
$-K'(x_2)\| \leq A\|x_1 - x_2\|^{\alpha-\beta}$, где x^0- произвольный элемент пространства X, а $A-$ константа, зависящая лишь от r и x_0.

Система уравнений (6.7) в операторной форме записывается в виде выражения

$$K_n(x_n) \equiv \bar{P}_n[\tilde{a}(s)x_n(s) - \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma[\tilde{h}(s,\sigma,x_n(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}]d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma[\tilde{h}(s,\sigma,x_n(\sigma))]d\sigma] = \bar{P}_n[\tilde{f}],$$

где

$$\tilde{a}(s) = a\left(s - \frac{\pi}{2n+1}\right), \quad \tilde{h}(s,\sigma,x_n(\sigma)) = h\left(s - \frac{\pi}{2n+1}, \sigma, x_n(\sigma)\right),$$

$$\tilde{f}(s) = f\left(s - \frac{\pi}{2n+1}\right).$$

Производная Фреше оператора $K_n(x_n)$ равна

$$K'_n(x_n)z_n \equiv \bar{P}_n[\tilde{a}(s)z_n(s) - \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma[\tilde{h}'_u(s,\sigma,x_n(\sigma))z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}]d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma[\tilde{h}'_u(s,\sigma,x_n(\sigma))z_n(\sigma)]d\sigma],$$

где $\tilde{h}'_u(s,\sigma,x_n(\sigma)) = h'_u(s - \pi/(2n+1), \sigma, x_n(\sigma))$.

Рассуждения, мало отличающиеся от приведенных при доказательстве теоремы 6.1, позволяют утверждать, что

$$\|K'_n(x'_n) - K_n(x''_n)\| \le An^\beta \ln^2 n \|x'_n - x''_n\|^\alpha.$$

Пусть x_n^0 - полином наилучшего равномерного приближения степени n к функции $x^*(t)$. Покажем, что если в некоторой окрестности S_1 точки x^* существует ограниченный правый обратный оператор $[K'(x)]_r^{-1}(x \in S_1)$ с нормой $\|[K'(x)]_r^{-1}\| = B_0$, то при достаточно больших n существует линейный оператор $[K'_n(x_n^0)]_r^{-1}$. Существование правого обратного оператора $[K'(x_n^0)]_r^{-1}$ следует при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)} < 1$, из результатов, приведенных в § 6 введения, причем $\|[K'(x_n^0)]_r^{-1}\| = B_0/(1-q)$. Как и в § 2, можно показать, что при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)}\ln^2 n < 1$, оператор $K'_{1n}(x_n^0)$, где

$$K'_{1n}(x_n^0)z_n \equiv \bar{P}_n[a(t)z_n(t) - \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma[h'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2}]d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma[h'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))z_n(\sigma)]d\sigma],$$

имеет линейный обратный $[K'_{1n}(x_n^0)]^{-1}$ с нормой $\|[K'_{1n}(x_n^0)]^{-1}\| \leq A\ln n$.

Для доказательства существования линейного оператора $[K'_n(x_n^0)]_r^{-1}$ нужно оценить

$$\|K'_{1n}(x_n^0)z_n - K'_n(x_n^0)z_n\| \leq \|\bar{P}_n[[a(t)-\tilde{a}(t)]z_n(t)\|+$$

$$+\|\frac{1}{2\pi}\bar{P}_n[\int_0^{2\pi} P_n^\sigma[h'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))-\tilde{h}'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))]z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}]d\sigma]\|+$$

$$+\|\frac{1}{2\pi}\bar{P}_n[\int_0^{2\pi} P_n^\sigma[h'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))-\tilde{h}'_u(s,\sigma,x_n^0(\sigma))]z_n(\sigma)]d\sigma\| =$$

$$= \|J_1\|+\|J_2\|+\|J_3\|.$$

Легко показать, что

$$\|J_1\|+\|J_3\| \leq A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)},$$

$$|I_2| \leq A\ln n \max_{0\leq k\leq 2n}\left|\int_0^{2\pi} P_n^\sigma[[h'_u(s'_k,\sigma,x_n^0(\sigma))-\tilde{h}_u(s_k,\sigma,x_n^0(\sigma))]\times\right.$$

$$\left.\times z_n(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\bar{s}_k}{2}\right|d\sigma] \leq A\ln^2 n\|z_n\|n^{-\alpha}.$$

Так как I_2 - тригонометрический полином степени n, то

$$\|I_2\| \leq A\ln^2 n\|z_n\|n^{-(\alpha-\beta)}.$$

Из оценок норм $\|J_1\|, \|J_2\|, \|J_3\|$ и теоремы Банаха следует, что при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)}\ln^2 n < 1$, существует линейный оператор $[K'_n(x_n^0)]^{-1}$ с нормой $\|[K'_n(x_n^0)]^{-1}\| = B_2 \leq B_1/(1-q)$. При доказательстве предыдущей теоремы было показано, что $\|K'_n(x_n^0)\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\ln n$. Следовательно, уравнение (6.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 6.5, приведенной во введении, из которой следует существование решения x_n^* уравнения (6.7) и оценка близости $\|x^*-x_n^*\|$.

Доказательство теоремы 6.3 подобно доказательству теоремы 6.2.

Доказательство теоремы 6.4. Покажем, что при выполнении условий "б" оператор K имеет в пространстве L_2 производную Фреше

$$K'(x)z_n \equiv a'(t,x(t))z_n(t) + S_\gamma(h'_u(t,\tau,x(\tau))z_n(\tau)),$$

причем справедливо неравенство

$$\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \le AF. \qquad (6.17)$$

Для доказательства существования производной $K'(x)z_n$ оценим разность

$$\|I_1\|/\|z_n\| = \|K(x + z_n) - K(x) - K'(x)z_n\|/\|z_n\|.$$

При этом ограничимся оценкой второго, интегрального, слагаемого в выражении для I_1.

Очевидно,

$$|I_1| = \left| \frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma \left\{ \int\limits_0^1 (1-\nu) h''_u(t, \tau, x(\tau) + \nu z_n(\tau)) d\nu \right\} z_n^2(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau \right|.$$

Представляя $h''_u(t,\tau,u) = [h''_u(t,\tau,u) - h''_u(\tau,\tau,u)] + h''_u(\tau,\tau,u)$, получаем $\|I_1\| \le A\|z_n\| \max|z_n|$ и, следовательно, $\|I_1\|/\|z_n\| \le An^{1/2}\|z_n\|$.

Из полученной оценки следует, что $\lim\limits_{\|z_n\| \to 0} \|I_1\|/\|z_n\| = 0$. Неравенство (6.17) доказано.

Нетрудно видеть, что производная Фреше оператора K_n имеет вид

$$K'_n(x_n)z_n \equiv \bar{P}_n^s[a'_u(s, x_n(s))z_n(s) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma [h'_u(s,\sigma,x_n(\sigma))z_n(\sigma)]d\sigma] -$$

$$-\frac{i}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma [h'_u(s,\sigma,x_n(\sigma))z_n(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}] d\sigma.$$

Докажем справедливость неравенства

$$\|K'_n(x'_n) - K'_n(x''_n)\| \le AF. \qquad (6.18)$$

В самом деле, $\|K'_n(x'_n)z_n - K'_n(x''_n)z_n\| \le I_2 + I_3$,
где

$$I_2 = \|\bar{P}_n[S_\gamma(P_n^\tau[h'_u(\tau,\tau,x'_n(\tau)) - h'_u(\tau,\tau,x''_n(\tau)))z_n(\tau)])]\|,$$

$$I_3 = \|\bar{P}_n[\frac{1}{\pi i} \int\limits_\gamma P_n^\tau [\frac{h^*(t,\tau,x'_n(\tau)) - h^*(t,\tau,x''_n(\tau))}{|\tau - t|^{1-\beta}} z_n(\tau)]d\tau]\| =$$

$$= \|\bar{P}_n[\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma [[h^*(s,\sigma,x'_n(\sigma)) - h^*(s,\sigma,x''_n(\sigma))] z_n(\sigma) e^{i\sigma} p(s,\sigma)] d\sigma]\|,$$

$p(s,\sigma) = |e^{i\sigma} - e^{is}|^{\beta-1}$ при $|\sigma - s| \geq \frac{\pi}{2n+1}$ и $p(s,\sigma) = |e^{i\pi/(2n+1)} - 1|^{\beta-1}$ при $|\sigma - s| < \frac{\pi}{2n+1}$, $h^*(t,\tau,x(\tau)) = (h(t,\tau,x(\tau)) - h(\tau,\tau,x(\tau)))\times$ $\times(\mathrm{ctg}\frac{\tau-t}{2})|\tau - t|^{1-\beta}$.

Нетрудно видеть, что

$$I_2 \leq A\|P[[h'_u(\tau,\tau,x'_n(\tau)) - h'_u(\tau,\tau,x''_n(\tau))]z_n(\tau)]\| \leq$$
$$\leq A\max|h'_u(t,t,x'_n(t)) - h'_u(t,t,x''_n(t))\|z_n\|.$$

Перейдем к оценке выражения I_3. Если в I_3 подынтегральный член является действительной функцией, то $I_3 \leq I_4 I_5$,
где

$$I_4 = \max\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{P_n^\sigma\{h^*(s,\sigma,x'_n(\sigma)) - h^*(s,\sigma,x''_n(\sigma))][p(s,\sigma)]^{1/2}\}^2 d\tau\}^{1/2},$$

$$I_5 = \{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ds\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{P_n^\sigma[z_n(\sigma)e^{i\sigma}[\bar{P}_n^s[p(s,\sigma)]]^{1/2}]\}^2 d\sigma\}^{1/2}.$$

Можно показать, что

$$I_4 \leq A\max|h^*(s,s,x'_n(s)) - h^*(s,s,x''_n(s))|.$$

Аналогично

$$I_5 = \{\frac{2}{(2n+1)^2}\sum_{i=0}^{2n}\sum_{k=0}^{2n}|z_n(s_k)|^2 p(s_i,s_k)\}^{1/2} =$$

$$= \{\frac{2}{(2n+1)^2}\sum_{k=0}^{2n}|z_n(s_k)|^2\sum_{i=0}^{2n}p(s_i,s_k)\}^{1/2} \leq A\|z_n\|.$$

Из проведенных выкладок следует, что в случае действительных функций $I_3 \leq AF||z_n\|$. В случае, если подынтегральная функция является комплексной, представляя ее в виде линейной комбинации действительных функций, приходим к аналогичной оценке. Из оценок выражений I_2 и I_3 следует справедливость неравенства (6.18).

Из существования линейного оператора $[K'(x_0)]^{-1}$ и теоремы Банаха следует, при n таких, что $q_1 = A\ln nE_n(x_0) < 1$, существование линейного оператора $[K'(x_n^0)]^{-1}$ с нормой $\|[K'(x_0)]^{-1}\| \leq \|[K'(x_n^0)]^{-1}\|/(1-$
$-q_1)$. В § 3 доказано, при n таких, что $q_2 = A\ln^2 n\max[E_n(\psi(t))$, $E_n(h'_u(t,t,x_n^0(t)))$, $E_n^{t,\tau}(h'_u(t,\tau,x_n^0(\tau)))] < 1$, существование линейного оператора $[K'_n(x_n^0)]^{-1}$ с нормой B_0. Здесь $\psi(t)$ - решение краевой задачи

$\psi^+(t) = G(t)\psi^-(t)$, $G(t) = (a'_u(t, x_n^0(t)) - h'_u(t, t, x_n^0(t)))/(a'_u(t, x_n^0(t)) + h'_u(t, t, x_n^0(t))))$. Справедливость доказываемой теоремы следует из результатов § 6 введения.

6.2. Проекционные методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования

Рассмотрим нелинейное с. и. у.

$$G(x) \equiv a(t, x(t)) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau = f(t), \tag{6.19}$$

где $L = c_1c_2$ - сегмент единичной окружности γ.

Приближенно решение уравнения (6.19) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы уравнений

$$G_n(x_n) \equiv \bar{P}_n \left[a^*(t, x_n(t)) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L P_n^\tau \left[\frac{h^*(t, \tau, x_n(\tau))}{\tau - t} \right] d\tau \right] = \\ = \bar{P}_n[f^*(t)], \tag{6.20}$$

где

$$a^*(t, x_n(t)) = \begin{cases} a(t, x(t)) & \text{при } t \in L, \\ x(t) & \text{при } t \notin L; \end{cases}$$

$$h^*(t, \tau, x_n(\tau)) = \begin{cases} h(t, \tau, x_n(\tau)) & \text{при } t \text{ и } \tau \in L, \\ 0 & \text{при } t \text{ или } \tau \notin L; \end{cases}$$

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \in L, \\ 0 & \text{при } t \notin L. \end{cases}$$

Обоснование вычислительной схемы (6.20) проводится по той же схеме, что и обоснования вычислительных схем, приведенных в предыдущем пункте. Основное различие состоит в том, что при исследовании связи между обратимостью операторов G и G_n нужно вместо результатов § 2 и § 3 использовать результаты § 4.

Опуская промежуточные выкладки, сформулируем утверждения, по сути дела аналогичные утверждениям предыдущего параграфа.

Теорема 6.5 [46]. Пусть в сфере $S(x^*, \tau)$, $r = B_* B_0^2/(1-q)$, $B_* =$

$= \|R(x^*)\| + O(n^{-\alpha}\ln n)$, $q = O(F_1 B_* B_0^2) + \sqrt{1 - 1/(B_*^4 B_0^4)} < 1$,
$R(x^*)z \equiv a'_u(t, x^*(t))z(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L h'_u(t, \tau, x^*(\tau))z(\tau)(\tau - t)^{-1}d\tau$,
выполнены условия:

1) $a'_u(t, u) \in H_{\alpha\alpha}, h'_u(t, \tau, u) \in H_{\alpha\alpha\alpha}, f(t) \in H_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$;

2) $\max\limits_{t,\tau\in L}\{|h'_u(t, \tau, u_1) - h'_u(t, \tau, u_2)|, |h^*(t, \tau, u_1) - h^*(t, \tau, u_2)|\} \le F_1$;

3) производная Фреше $R(x^*)z$ оператора $G(x^*)$ непрерывно обратима в пространстве L_2 и $\|[R(x^*)]^{-1}\| \le B_0$;

4) характеристическое уравнение

$$a'_u(t, x^*(t))z(t) + \frac{h'_u(t, t, x^*(t))}{\pi i}\int\limits_L \frac{z(\tau)d\tau}{\tau - t} = 0$$

имеет решение вида $z(t) = (t - c_1)^{\delta_1}(t - c_2)^{\delta_2}\varphi(t)$, где $\delta_1 = \zeta_1 + i\xi_1$, $\delta_2 = \zeta_2 + i\xi_2$, $\varphi(t) \in H_\alpha$.

Тогда при n таких, что $O((n^{-\alpha} + n^{-\theta})\ln n) < 1$ $(\theta = 1$ при $\zeta > 0$, $\theta = 1 - |\zeta|$, при $\zeta \le 0$, $\zeta = \min(\zeta_1, \zeta_2))$, система уравнений (6.20) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| = O((n^{-\alpha} +$
$+n^{-\theta})\ln n)$, где x^* - решение уравнения (6.19).

7. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом дискретных особенностей

7.1. Приближенное решение линейных сингулярных интегральных уравнений

В § 5 предложена вычислительная схема приближенного решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях, когда функция $a^2(t) - b^2(t)$ обращалась в нуль на многообразиях меры, большей чем нуль. Обоснование предложенной вычислительной схемы проводилось в предположении, что коэффициенты и правая часть уравнения удовлетворяют условию Гельдера. Совершенно очевидно, что исследованная в § 5 вычислительная схема применима и в нормальных (не исключительных) случаях.

Представляет значительный интерес распространение полученных в § 5 результатов на случай, когда коэффициенты и правые части уравнений принадлежат классам дифференцируемых функций, а также на нелинейные сингулярные интегральные уравнения.

Этим вопросам посвящен данный параграф. Отметим, что полученные результаты одновременно применимы в нормальных и исключительных случаях.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_{-1}^{1} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \qquad (7.1)$$

где $a, b, f \in W^r(1)$, $h(t,\tau) \in W^{r,r}(1)$, $b(t) \neq 0$.

Из проводимых ниже выкладок с очевидностью следует, что предлагаемый метод применим к сингулярным интегральным уравнениям на кусочно-гладких контурах. Этот метод одновременно применим к сингулярным интегральным уравнениям нормального типа и сингулярным интегральным уравнениям в исключительных случаях.

Разделим сегмент $[-1,1]$ на n частей точками $t_k = -1 + 2k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Обозначим через Δ_k сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Введем узлы $t_{k,j} = t_k + jh/(r+1)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $h = 2/n$. В каждом сегменте Δ_k построим полином $L_r(f, \Delta_k)$, интерполирующий функцию $f(t)$ по узлам t_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Полином $L_r(f, \Delta_k)$ имеет вид

$$L_r(f, \Delta_k) = \sum_{j=1}^{r} f(t_{kj})\psi_{kj}(t),$$

где $\psi_{kj}(t)$– фундаментальный полином по узлам t_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Сплайн, составленный из полиномов $L_r(f, \Delta_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, обозначим через $f_n(t)$.

Каждому узлу t_{kj} поставим в соответствие сегмент $\Delta_{kj} = [t_{kj} - qh^*, t_{kj} + h^*]$, где $h^*(0 < h^* < h/(r+1))$ и q - параметры, выбор которых описан ниже.

Приближенное решение уравнения (7.1) будем искать в виде сплайна $x_n(t)$, составленного из полиномов $L_r(x, \Delta_k)$ со значениями $x_{kj} = x(t_{kj})$, подлежащими определению. Значения x_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений вида

$$a(t_{kl})x_{kl} + b(t_{kl})\int_{\Delta_{kl}}\frac{x_n(\tau)}{\tau - t_{kl}}d\tau + \sum_{i=0}^{n-1}{}' b(t_{kl})\int_{\Delta_i}\frac{x_n(\tau)}{\tau - t_{kl}}d\tau +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\Delta_i} h(t_{kl},\tau)x_n(\tau)d\tau = f(t_{kl}), \qquad (7.2)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, r$,
где $\sum'$ означает суммирование по $i \neq k-1, k, k+1$.

Интегралы

$$\int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{x_n(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \int\limits_{\Delta_i} \frac{x_n(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \int\limits_{\Delta_i} h(t_{k,l}\tau) x_n(\tau) d\tau$$

при реализации вычислительной схемы (7.2) аппроксимируются квадратурными формулами. Как будет видно из дальнейшего, вносимая при этом погрешность легко учитывается.

Докажем, что выбором параметра h^* можно добиться однозначной разрешимости системы уравнений (7.2). Для доказательства воспользуемся теоремой Адамара об обратимости матриц.

Представим систему уравнений (7.2) в виде матричного уравнения

$$CX = F, \tag{7.3}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_N)$, $F = (f_1, \ldots, f_N)$, $C = \{c_{ij}\} ij = \overline{1, N}$, $N = nr$.

Здесь $x_l = x_{ij}$, $f_l = f_{ij}$, где $l = ri + j$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $x_{ij} = x(t_{ij})$, $f_{ij} = f(t_{ij})$.

Пусть $l = ri + j$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 1, 2, \ldots, r$, $k = rv + w$, $v = 0, 1, \ldots, n-1$, $w = 1, 2, \ldots, r$. Тогда элементы c_{kl} матрицы C имеют вид

$$c_{ll} = a(t_{ij}) + b(t_{ij}) \int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau) d\tau}{\tau - t_{ij}} +$$

$$+ \int\limits_{\Delta_i} \psi_{ij}(\tau) h(t_{ij}, \tau) d\tau, \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$

$$c_{lk} = b(t_{ij}) \int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{vw}(\tau) d\tau}{\tau - t_{ij}} + \int\limits_{\Delta_i} \psi_{vw}(\tau) h(t_{ij}, \tau) d\tau,$$

если $t_{vw} \in \Delta_i$ (т.е. $v = i$),

$$c_{lk} = b(t_{ij}) \int\limits_{\Delta_v} \frac{\psi_{vw}(\tau) d\tau}{\tau - t_{ij}} + \int\limits_{\Delta_v} \psi_{vw}(\tau) h(t_{ij}, \tau) d\tau,$$

если $t_{vw} \notin \Delta_i$.

Оценим снизу максимум

$$|c_{ll}| \geq |b(t_{ij})| \left| \int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau) d\tau}{\tau - t_{ij}} \right| - |a(t_{ij})| - \left| \int\limits_{\Delta_i} \psi_{ij}(\tau) h(t_{ij}, \tau) d\tau \right|.$$

Нетрудно видеть, что $|a(t_{ij})| \le a$, $\left|\int\limits_{\Delta_i} \psi_{ij}(\tau)h(t_{ij},\tau)d\tau\right| = O(n^{-1})$, где $a-$ константа, не зависящая от i,j, $i = 0,1,\ldots,n-1$, $j = 1,2,\ldots,r$.

Так как $\psi_{ij}(t_{ij}) = 1$, то для любого как угодно большого K существуют такие параметры h^* и q, что

$$\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau)d\tau}{\tau - t_{ij}} \ge K.$$

В самом деле,

$$\left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau)d\tau}{\tau - t_{ij}}\right| \ge \left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{d\tau}{\tau - t_{ij}}\right| -$$

$$-\left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau)-1}{\tau - t_{ij}}d\tau\right| \ge |\ln q| - \left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau)-1}{\tau - t_{ij}}d\tau\right|.$$

Выбором q можно добиться, чтобы $\ln q \ge K + 1 + a$, а выбором h^* можно добиться того, чтобы

$$\left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{ij}(\tau)-1}{\tau - t_{ij}}d\tau\right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon(\varepsilon > 0)-$ как угодно малое положительное число.

Следовательно, за счет выбора q и h^* можно добиться того, чтобы $|c_{ll}| \ge K$, $l = 1,2,\ldots,N$, где K - как угодно большое положительное число.

Приступим к оценке $|c_{kl}|$ при $k \ne l$, $l,k = 1,2,\ldots,N$.

Так как $\psi_{vw}(t_{ij}) = 0$ при $v \ne i$ и $w \ne j$, то

$$\left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \frac{\psi_{vw}(\tau)d\tau}{\tau - t_{ij}}\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Легко видеть, что

$$\left|\int\limits_{\Delta_{v}} \frac{\psi_{vw}(\tau)d\tau}{\tau - t_{ij}}\right| \le A\frac{1}{|i-v|},$$

$$\left|\int\limits_{\Delta_i} \psi_{vw}(\tau)h(t_{ij},\tau)d\tau\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

За счет выбора константы K можно добиться выполнения условий теоремы Адамара. Отсюда следует, что при значениях h^* и q таких, что выполнены условия теоремы Адамара, система (7.3) и, следовательно, система (7.2) однозначно разрешимы.

Оценим норму матрицы C^{-1}. Для этого представим матрицу C в виде $C = D + G$, где $D-$ диагональная матрица, состоящая из элементов c_{ll}, матрица $G = C - D$.

Матричное уравнение (7.3) будем рассматривать в пространстве R_1^N векторов $x = (x_1, \ldots, x_N)$ с нормой $\|x\| = \max\limits_k |x_k|$. Если рассматривать матрицу C как оператор, отображающий пространство R_1^N в себя, то

$$\|C\| = \max_k \sum_{j=1}^{N} |c_{kj}|.$$

Представим матрицу C в виде $C = D + G = D(I + D^{-1}G)$. Так как диагональные элементы матрицы D больше K, то $\|D^{-1}\| \leq 1/K$. По построению матрицы G $\|G\| \leq \beta \ln n$, причем константа $\beta = O(1)$ и зависит только от величины $\max\limits_{t\in\gamma} |b(t)|$, $\max\limits_{t,\tau\in\gamma} |h(t,\tau)|$. Следовательно, по теореме Банаха при достаточно больших K $(K \geq 2\beta \ln n)$
$\|[I + D^{-1}G]^{-1}\| \leq 2$ и $\|C^{-1}\| \leq 2/K$.

Аналогичные оценки справедливы и в пространствах R_2^N и E^N.

Оценим точность решения сингулярного интегрального уравнения (7.1) по вычислительной схеме (7.2).

Обозначим через x^* решение уравнения (7.1). Приравняем левые и правые части выражения $Kx^* = f$ в узлах коллокации. В результате имеем

$$a(t_{kl})x_{kl}^* + b(t_{kl}) \int\limits_{\Delta_k} \frac{x^*(\tau)}{\tau - t_{kl}} d\tau +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1}{}' b(t_{kl}) \int\limits_{\Delta_i} \frac{x^*(\tau)}{\tau - t_{kl}} d\tau + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\Delta_i} h(t_{kl},\tau)x^*(\tau)d\tau = f(t_{kl}), \qquad (7.4)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, r$, где $x_{kl}^* = x^*(t_{kl})$. Здесь $\sum'$ означает суммирование по $i \neq k$.

Обозначим через $\tilde{x}_n^*$ сплайн, аппроксимирующий функцию $x^*(t)$ по узлам t_{kl}, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, r$, и построенный по описанному выше алгоритму. Вычитая почленно из системы уравнений (7.2) систему уравнений (7.4), имеем:

$$a(t_{kl})(x_{kl} - \tilde{x}_{kl}^*) + b(t_{kl}) \int\limits_{\Delta_{kl}} \frac{x_n(\tau) - \tilde{x}_n^*(\tau)}{\tau - t_{kl}} d\tau +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}{}' b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_i}\frac{x_n(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau+\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_i}h(t_{kl},\tau)(x_n(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau))d\tau=$$

$$=b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_{kl}}\frac{x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau+b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_{kl}^*}\frac{x^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}{}' b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_i}\frac{x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau+\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_i}h(t_{kl},\tau)(x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau))d\tau, \tag{7.5}$$

$k=0,1,\ldots,n-1$, $l=1,2,\ldots,r$, где $\Delta_{kl}^*=\Delta_{k-1}\cup(\Delta_k\setminus\Delta_{kl})\cup\Delta_{k+1}$.

Оценим правую часть выражения (7.5).

Нетрудно видеть, что

$$r_1=\left|b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_{kl}}\frac{x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau\right|\le$$

$$\le\left|b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_{kl}}\frac{x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau)-(x^*(t_{kl})-\tilde{x}_n^*(t_{kl}))}{\tau-t_{kl}}d\tau\right|\le An^{-r};$$

$$r_3=\left|\sum_{i=0}^{n-1}{}' b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_i}\frac{x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau\right|\le An^{-r}\ln n;$$

$$r_4=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\Delta_i}h(t_{kl},\tau)(x^*(\tau)-\tilde{x}_n^*(\tau))d\tau\right|\le An^{-r}.$$

Приступим к оценке интеграла

$$r_2=\left|b(t_{kl})\int\limits_{\Delta_{kl}^*}\frac{x^*(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau\right|.$$

Введем функцию $\psi(\tau)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\int\limits_{\Delta_{kl}^*}\frac{\psi(\tau)}{\tau-t_{kl}}d\tau=0$;

2) в области Δ_{kl}^* функция $\psi(t)$ (при выполнении условия 1) наилучшим образом в метрике пространства C приближает функцию $x^*(t)$.

Отметим, что функция $\psi(t)$ может быть разрывной в области Δ_{kl}^*.

Обозначим через $E^*_{kl}(x^*)$ модуль интеграла

$$E^*_{kl}(x^*) = \left| \int\limits_{\Delta^*_{kl}} \frac{x^*(\tau) - \psi(\tau)}{\tau - t_{kl}} d\tau \right|,$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 2.

Через $E^*(x^*)$ обозначим величину

$$E^*(x^*) = \max_{k,l} E^*_{kl}(x^*).$$

Очевидно, $r_2 \leq E^*(x^*)$.

Из уравнения (7.5) и оценки $\|C^{-1}\|$ следует, что

$$\max |x^*(t_{kl}) - x^*_n(t_{kl})| \leq A(n^{-r} \ln n + E^*(x^*)).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7.1. Пусть $a, b, f \in W^r$, $h \in W^{rr}$, $b(t) \neq 0$ на сегменте $[-1, 1]$. Пусть уравнение (7.1) имеет единственное решение. Тогда существуют такие параметры h^* и q, что система уравнений (7.2) однозначно разрешима и справедлива в метрике пространства R^1_N оценка $\|x^*(t_{kl}) - x_n(t_{kl})\| \leq A(n^{-r} \ln n + E^*(x^*))$, где x^* и x_N– решения уравнений (7.1) и (7.2), соответственно.

7.2. Приближенное решение нелинейных сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{b(t, \tau, x(\tau))}{\tau - t} d\tau + \int\limits_{\gamma} h(t, \tau, x(\tau)) d\tau = f(t), \qquad (7.6)$$

где γ– единичная окружность с центром в начале координат. Условия, налагаемые на гладкость функций $a(t)$, $b(t, \tau, u)$, $h(t, \tau, u)$, $f(t)$ и на гладкость решения $x(t)$ будут описаны ниже.

С помощью преобразования Гильберта от уравнения (7.6) можно перейти к следующему уравнению:

$$a(e^{is})x(e^{is}) - \frac{i}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} b(e^{is}, e^{i\sigma}, x(e^{i\sigma})) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma +$$

$$+ i \int\limits_0^{2\pi} h(e^{is}, e^{i\sigma}, x(e^{i\sigma})) e^{i\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} b(e^{is}, e^{i\sigma}, x(e^{i\sigma})) d\sigma =$$

$$= f(e^{is}),\ 0 \leq s < 2\pi. \tag{7.7}$$

Для простоты обозначений вместо (7.7) ниже будем рассматривать уравнение

$$Kx \equiv a(s)x(s) + S(b(s,\sigma,x(\sigma))) + T(h(s,\sigma,x(\sigma))) \equiv a(s)x(s)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} b(s,\sigma,x(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma + \int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma,x(\sigma))d\sigma = f(s). \tag{7.8}$$

Будем предполагать, что $a(s), f(s) \in H_\alpha$, $b_3'(s,\sigma,u) \in H_{\alpha,\alpha,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, где $b_3'(s,\sigma,u)$ означает взятие производной по третьей переменной.

Обозначим через X банахово пространство $X = H_\beta$ $(0 < \beta < \alpha)$.

Обозначим через K' производную Фреше оператора K в пространстве H_β, $0 < \beta < \alpha$. Можно показать, что производная Фреше оператора K на элементе x_0 равна

$$K'(x_0)z \equiv a(s)z(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} b_3'(s,s,x_0(s))z(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_3'(s,\sigma,x_0(\sigma))z(\sigma)d\sigma.$$

Будем предполагать, что функция $a^2(s) - b_3'(s,s,x_0(s))^2$ может обращаться в ноль на множествах с мерой, равной или большей нуля.

Построим вычислительную схему приближенного решения уравнения (7.8). Выберем узлы

$$s_k = \frac{\pi k}{n},\ s_k^* = s_k + h,\ 0 < h \leq \frac{\pi}{2n},\ k = 0,...,2n.$$

Значение параметра h определяется ниже.

Уравнение (7.8) будем решать методом механических квадратур. Для этого приравняем левые и правые части уравнения (7.8) в узлах s_k^*, $k = 0,1,...,2n-1$, а сингулярный и регулярный интегралы аппроксимируем квадратурными формулами. Сингулярный интеграл при $s \in [s_j, s_{j+1})$ аппроксимируется квадратурной формулой

$$Sx = R_n + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0,k\neq j-1,j+1}^{2n-1} b(s,s_k^*,x(s_k^*))\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma, \tag{7.9}$$

а регулярный интеграл аппроксимируется квадратурной формулой прямоугольников.

В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$a(s_j^*)x(s_j^*) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0,k\neq j-1,j+1}^{2n-1} b(s_j^*, s_k^*, x(s_k^*)) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma +$$

$$+\frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} h(s_j^*, s_k^*, x(s_k^*)) = f(s_j^*),\ \ j = 0, ..., 2n-1. \tag{7.10}$$

Воспользуемся методом Ньютона – Канторовича для решения системы (7.10).

После того, как из системы уравнений (7.10) определены значения $x(s_k^*)$, $k = 0, 1, ..., 2n-1$, решение уравнения (7.8) восстанавливается в виде тригонометрического полинома n-го порядка

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} x(s_k^*)\psi_k(s), \tag{7.11}$$

где

$$\psi_k(s) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(s - s_k^*)}{\sin \frac{s - s_k^*}{2}}.$$

Возможно также восстановление решения уравнения (7.11) в виде полигонов или локальных сплайнов, построенных по значениям $x(s_k^*)$, $k = 0, ..., 2n-1$.

Пусть P_n– оператор, проектирующий пространство X на пространство $X_n \subset X$, состоящее из тригонометрических полиномов степени n. Проектирование осуществляется по формуле

$$P_n x = \sum_{k=0}^{2n-1} x(s_k^*)\psi_k(s).$$

Обозначим через K_n оператор, описываемый системой уравнений (7.10) в пространстве X_n, а через K– оператор, описываемый уравнением (7.8) в пространстве X.

Производная Фреше $K_n'(x_0)z_n, z_n \in X_n$, оператора K_n на начальном элементе x_0 может быть записана в виде вектора с компонентами

$$a(s_j^*)z_n(s_j^*) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0,k\neq j-1,j+1}^{2n-1} b_3'(s_j^*, s_k^*, x_0(s_k^*))z_n(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma +$$

$$+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} h_3'(s_j^*,s_k^*,x_0(s_k^*))z_n(s_k^*), \quad j=0,...,2n-1.$$

Ниже будет показано, что при соответствующем выборе h производная Фреше $K_n'(x_0)$ непрерывно обратима. В предположении, что оператор $K_n'(x_0)$ непрерывно обратим, приближенное решение уравнения (7.10) будем искать по модифицированному методу Ньютона – Канторовича

$$\tilde{x}_{m+1}=\tilde{x}_m-[K_n'(x_0)]^{-1}K_n(\tilde{x}_m),\ m=0,1,2,... \tag{7.12}$$

Здесь $K_n'(x_0)$– производная Фреше оператора K_n в пространстве X_n , $\tilde{x}_0$– начальное приближение, $\tilde{x}_0=P_n(x_0)$.

Приведем итерационный процесс (7.12) к следующему виду:

$$K_n'(x_0)\tilde{x}_{m+1}=K_n'(x_0)\tilde{x}_m-K_n\tilde{x}_m. \tag{7.13}$$

Уравнение (7.13) на каждом шаге итерационного процесса определяет систему линейных алгебраических уравнений вида

$$Cx=g, \tag{7.14}$$

где $g=K_n'(x_0)\tilde{x}_m-K_n\tilde{x}_m$, $C=K_n'(x_0)$.

Докажем, что система (7.14) на каждом шаге итерационного процесса имеет единственное решение. Для этого нужно доказать непрерывную обратимость оператора $K_n'(x_0)$. Для этого воспользуемся теоремой Адамара, приведенной в §3 введения. Обозначим для краткости $a_j=a(s_j^*)$, $b_{jk}=b_3'(s_j^*,s_k^*,x_0(s_k^*))$, $h_{jk}=h_3'(s_j^*,s_k^*,x_0(s_k^*))$, $j,k=0,...,2n-1$. Будем полагать, что производные $b_3'(s_j^*,s_j^*,x_0(s_k^*))$, $j,k=0,...,2n-1$, отличны от нуля на элементах $x_0(s)$, расположенных в окрестности решения $x^*(s)$ уравнения (7.8). Рассмотрим диагональные элементы матрицы системы (7.14)

$$|c_{jj}|=\left|a_j+\frac{b_{jj}}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{s_{j+1}-s_j^*}{2}}{\sin\frac{s_j-s_j^*}{2}}\right|+\frac{\pi h_{jj}}{n}\right|=\left|a_j+\frac{b_{jj}}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}\right|+\frac{\pi h_{jj}}{n}\right|,$$

$j=0,1,...,2n-1$.

Так как $b_{jj}\neq 0$, $j=0,...,2n-1$, то выбором h элементы c_{jj} могут быть сделаны как угодно большими. С другой стороны, имеем

$$\sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1}|c_{jk}|\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0,k\neq j,j-1,j+1}^{2n-1}|b_{jk}|\left|\int_{s_k}^{s_{k+1}}\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s_j^*}{2}d\sigma\right|+$$

$$+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0,k\neq j}^{2n-1} h_{jk} \leq A + B\ln n.$$

Таким образом, если для всех значений $j = 0,...,2n-1$ выполняются условия

$$\left| a_j + \frac{b_{jj}}{\pi}\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}\right| + \frac{\pi h_{jj}}{n}\right| > A + B\ln n, \tag{7.15}$$

где A и $B-$ вполне определенные константы, зависящие от функций
$b_3'(s,\sigma,x_0(\sigma))$, $h_3'(s,\sigma,x_0(\sigma))$, то система (7.14) имеет единственное решение на каждой итерации $m = 0,1,2,....$

Докажем сходимость итерационного процесса (7.12) к точному решению уравнения (7.10).

Доказательство сходимости будем проводить в пространстве R_{2n} векторов $v = (v_1,...,v_{2n})$ с нормой $||v|| = \max\limits_{1\leq i\leq 2n}|v_i|$.

Оценим сначала норму обратного оператора $[K_n'(x_0)]^{-1}$. Для этого воспользуемся обобщенной теоремой Банаха.

Представим матрицу оператора $K_n'(x_0)$ в виде суммы двух матриц:

$$K_n'(x_0) = D + E,$$

где элементы матрицы D имеют вид

$$d_{jk} = \begin{cases} 0, & j\neq k; \\ a_j + \dfrac{b_{jj}}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}}\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \frac{\pi h_{jj}}{n}, & j = k; \end{cases}$$

а элементы матрицы E имеют вид

$$e_{jk} = \begin{cases} 0, & j = k; \\ \dfrac{\pi h_{jk}}{n}, & j = k-1, k+1; \\ \dfrac{b_{jk}}{2\pi}\displaystyle\int_{s_k}^{s_{k+1}}\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \frac{\pi h_{jk}}{n}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оценим нормы матриц D^{-1} и E в метрике пространства R_{2n} :

$$||D^{-1}|| \leq \left(\left|C\ln\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{h}{2}\right)}{\sin\dfrac{h}{2}}\right| + G\right)^{-1}, \ ||E|| \leq A + B\ln n.$$

Из последних двух соотношений следует, что выбором h можно добиться того, чтобы

$$||D^{-1}||||E|| \leq (A + B\ln n)\left|G + C\ln\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{h}{2}\right)}{\sin\dfrac{h}{2}}\right|^{-1} \leq q < 1.$$

Тогда по обобщенной теореме Банаха

$$||[K_n'(x_0)]^{-1}|| \leq \left(\left|G + C\ln\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{h}{2}\right)}{\sin\dfrac{h}{2}}\right| - A - B\ln n\right)^{-1}.$$

Для доказательства разрешимости уравнения (7.10) и сходимости к его решению метода Ньютона – Канторовича воспользуемся теоремой о сходимости модифицированного метода Ньютона – Канторовича, приведенной в § 6 введения.

Из этой теоремы следует, что если в некоторой сфере $S(x_0, r)$ выполнено условие

$$||[K_n'(x_0)]^{-1}||||K_n'(u_1) - K_n'(u_2)|| \leq q < 1, u_1, u_2 \in S(x_0, r), \quad (7.16)$$

то уравнение (7.10) имеет единственное в этой сфере решение $x_n^*(s)$ и итерационный процесс (7.12) сходится к этому решению.

Отметим, что если уравнение (7.10) имеет решение, то из условий гладкости функций a, b, h следует, что существует такая сфера $S(x_0, r)$, в которой выполняется неравенство (7.16).

Обозначим через $x^*(s)$ точное решение уравнения (7.8), а через $x_n^*(s)$– точное решение уравнения (7.10). В итерационном процессе (7.12) в качестве начального приближения возьмем $x_0(s) = \tilde{x}^*(s) = P_{2n}[x^*(s)]$. Будем считать, что в сфере $S(x_0, r)$ выполнено условие (7.16).

Тогда

$$||\tilde{x}_{m+1} - \tilde{x}_m|| \leq ||[K_n'(x_0)]^{-1}||||K_n\tilde{x}_m - K_n\tilde{x}_{m-1} - K_n'(x_0)(\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m-1})|| \leq$$

$$\leq ||[K_n'(x_0)]^{-1}||||[K_n'(\tilde{x}_{m-1} + \theta(\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m-1})) - K_n'(x_0)](\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m-1})|| \leq$$

$$\leq q||\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m-1}|| \leq q^2||\tilde{x}_{m-1} - \tilde{x}_{m-2}|| \leq \ldots \leq q^n||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0||$$

и, следовательно,

$$||x_n^* - x_0|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k ||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0|| \leq \frac{1}{1-q}||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0||.$$

Таким образом, $||P_{2n}[x^*] - x_n^*|| \le ||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0||/(1-q)$.

Осталось оценить $||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0||$. Из формулы (7.12) следует, что

$$||\tilde{x}_1 - \tilde{x}_0|| \le ||[K_n'(x_0)]^{-1}||||K_n(\tilde{x}_0)|| \le A||K_n(\tilde{x}_0)||.$$

Выражая $f(s_j^*)$ из формулы (7.10), оценим норму $||K_n(\tilde{x}_0)||$. Очевидно,

$$||K_n(\tilde{x}_0)|| = \max_{0\le j\le 2n-1}\Big[\Big|a(s_j^*)(x^*(s_j^*) - \tilde{x}^*(s_j^*))\Big| +$$

$$+\left|\sum_{k=0,k\ne j-1,j+1}^{2n-1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}(b(s_j^*,\sigma,x^*(\sigma)) - b(s_j^*,s_k^*,\tilde{x}^*(s_k^*)))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=j-1,j+1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}b(s_j^*,\sigma,x^*(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=0}^{2n-1}\int\limits_{s_k}^{s_{k+1}}(h(s_j^*,\sigma,x^*(\sigma)) - h(s_j^*,s_k^*,\tilde{x}^*(s_k^*)))d\sigma\right|\Big] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

Оценим каждое слагаемое $r_1, ..., r_4$ в отдельности.

Нетрудно видеть, что $r_1 + r_4 \le An^{-\alpha}$.

Несколько сложнее оценивается $r_2 \le An^{-\alpha}\ln n$.

Для оценки r_3 покажем, что для каждого узла s_j^*, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$, существует такая функция $\psi(s) \in H_\alpha$, что

$$\psi(s_j^*) = b(s_j^*, s_j^*, x(s_j^*))$$

и

$$\int\limits_{s_{j-1}}^{s_j}\psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma + \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}}\psi(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma - s_j^*}{2}d\sigma = 0.$$

При этом контур $[0, 2\pi]$ будем считать закольцованным, т.е. нуль отождествляется с 2π.

В качестве простейшего представителя функции $\psi(\sigma)$ можно взять прямую

$$\psi(\sigma) = \psi(s_j^*) + D(\sigma - s_j^*), \tag{7.17}$$

где

$$D = -\frac{nb(s_j^*, s_j^*, x(s_j^*))}{2\pi}\ln\left(\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{h}{2}\right)}\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{n} - \dfrac{h}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{h}{2}\right)}\right). \tag{7.18}$$

Тогда

$$r_3 \le \left| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} (b(s_j^*, \sigma, x^*(\sigma)) - \psi(\sigma)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| +$$

$$+ \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} (b(s_j^*, \sigma, x^*(\sigma)) - \psi(\sigma)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \Bigg| \le$$

$$\le \left| \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} (b(s_j^*, \sigma, x^*(\sigma)) - b(s_j^*, s_j^*, x^*(s_j^*))) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} (b(s_j^*, \sigma, x^*(\sigma)) - b(s_j^*, s_j^*, x^*(s_j^*))) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{s_{j-1}}^{s_j} (\psi(s_j^*) - \psi(\sigma)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} (\psi(\sigma) - \psi(s_j^*)) \mathrm{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| = I_1 \div I_4.$$

Оценивая каждое из слагаемых $I_1 \div I_4$ в отдельности, получим $I_1 \le An^{-\alpha}$; $I_2 \le An^{-\alpha}$; $I_3 + I_4 \le A|D|n^{-1}$.

Таким образом, при h таких, что $|D| \le n^{1-\alpha}$, имеем $r_3 \le An^{-\alpha} \ln n$.

Собирая оценки $r_1 \div r_4$, убеждаемся, что при указанных выше значениях h и D справедлива оценка

$$\max_{0 \le j \le 2n-1} |x^*(s_j^*) - x_n^*(s_j^*)| \le An^{-\alpha} \ln n.$$

Теперь можно оценить близость точного и приближенного решений в метрике пространства X. Если приближенное решение $x_n^*(s)$ восстанавливается на сегменте $[0, 2\pi]$ по значениям $x_n^*(s_k^*)$, $k = 0, 1, ...,$
$2n-1$, интерполяционным полиномом (7.11), то справедливы оценки $||x^* - x_n^*||_C \le An^{-\alpha} \ln^2 n$, $||x^* - x_n^*||_X \le An^{-\alpha+\beta} \ln^2 n$.

Если приближенное решение $x_n^*(s)$ восстанавливается на сегменте $[0, 2\pi]$ по значениям $x_n^*(s_k^*)$, $k = 0, ..., 2n-1$, полигоном, то справедливы оценки $||x^* - x_n^*||_C \le An^{-\alpha} \ln n$, $||x^* - x_n^*||_X \le An^{-\alpha+\beta} \ln n$.

Теорема 7.2 [50]. Пусть уравнение (7.8) имеет единственное решение $x^*(s) \in H_\alpha$, и пусть функции $a(s)$, $f(s) \in H_\alpha$, $b'_3(s, \sigma, u)$,

$h'_3(s,\sigma,u) \in H_{\alpha,\alpha,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда при таких значениях h, что выполнены условия (7.15), система уравнений (7.14) на каждом шаге итерационного процесса имеет единственное решение, а итерационный процесс (7.12) при $m \to \infty$ сходится к решению $(x_n^*(s_0^*), ...,$
$x_n^*(s_{2n-1}))$ и при $|D| \leq n^{1-\alpha}$ справедливы оценки

$$||x^*(s) - x_m^*(s)||_C \leq An^{-\alpha}\ln n, \quad ||x^*(s) - x_m^*(s)||_X \leq An^{-\alpha+\beta}\ln n,$$

где $x_n^*(s)$– полигон, построенный по значениям $(x_n^*(s_0^*), ..., x_n^*(s_{2n-1}^*))$.

Замечание 1. Из проведенных выше выкладок и результатов § 5 следует, что утверждения теоремы 7.2 могут быть распространены на исключительные случаи нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t) + \int\limits_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau,x(\tau))}{\tau - t} d\tau = f(t).$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что вычислительные схемы, исследованные в пункте 7.1, могут быть легко распространены на нелинейные сингулярные интегральные уравнения.

8. Приближенное решение сингулярных интегро - дифференциальных уравнений

Этот параграф посвящен приближенным методам решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (с.и.д.у.) различных видов. Рассматриваются линейные и нелинейные уравнения на замкнутых и разомкнутых контурах интегрирования.

8.1. Приближенное решение линейных сингулярных интегро - дифференциальных уравнений

В этом пункте предлагаются и обосновываются вычислительные схемы приближенного решения с. и. д. у. вида

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t)x^{(k)}(t) + b_k(t)S_\gamma(x^{(k)}(\tau)) + U_\gamma(h_k(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x^{(k)}(\tau))\right] =$$

$$= f(t) \tag{8.1}$$

при условиях

$$\int_\gamma x(t)t^{-k-1}\,dt = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{8.2}$$

и вида

$$Fx \equiv \sum_{k=0}^{m} [a_k(t)x^{(k)}(t) + S_\gamma(h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau))] = f(t) \tag{8.3}$$

при условиях (8.2). Напомним, что через $S_\gamma(x)$ и $U_\gamma(x)$ обозначены операторы

$$S_\gamma(x) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad U_\gamma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma x(\tau)d\tau.$$

Предположим выполненными условия

1) $a_k(t), b_k(t), f(t) \in H_\alpha, h_k(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}, 0 < \alpha \le 1$;

2) $a_k(t), b_k(t), f(t) \in \tilde{C}[0,\, 2\pi], h_k \in \tilde{C}[0,\, 2\pi]^2$;

3) $a_k(t), b_k(t), f(t) \in W^r H_\alpha, h_k(t,\tau) \in W^{r,r}H_{\alpha,\alpha}, k = 0, 1, \ldots, m$.

Обоснование вычислительных схем будем проводить в пространстве Гельдера $X = H_\beta$ $(\beta < \min(\alpha; 1-\eta))$ и его подпространстве X_n, состоящем из полиномов вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k$; в пространстве $X_1 = L_2(\gamma)$ и его подпространстве $X_{1,n}$, состоящем из полиномов вида $\sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k$.

Приближенное решение задачи (8.1) – (8.2) ищем в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^{k+m} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k, \tag{8.4}$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n = P_n\Big[\sum_{k=0}^{m} [a_k(t) x_n^{(k)}(t) + b_k(t) S_\gamma(x_n^{(k)}(\tau)) +$$

$$+ U_\gamma(P_n^\tau[h_k(t,\tau) x_n^{(k)}(\tau) d(t,\tau)]\Big)]] = P_n[f(t)], \tag{8.5}$$

где $d(t,\tau)$ - функция, определенная в § 2.

Теорема 8.1 [43], [44]. Пусть краевая задача (8.1) – (8.2) однозначно разрешима при любой правой части и выполнены условия 1. Тогда при n таких, что $q = A \ln n / n^\delta < 1$ $(\delta = \min(\beta, \alpha - \beta, 1 - \eta - \beta))$, система уравнений (8.5) однозначно разрешима и справедлива оценка $\|x - x_n\|_{H_\beta} \le A \ln n / n^\delta$, где x и x_n- решения краевой задачи (8.1) – (8.2) и уравнения (8.5), соответственно.

Теорема 8.2 [43], [44]. Пусть краевая задача (8.1) – (8.2) однозначно разрешима при любой правой части и выполнено условие 2. Тогда при n таких, что $q = A \sum\limits_{k=0}^{m} [n^{-1/2} + \omega(a_k, n^{\eta-1}) + \omega(b_k, n^{\eta-1}) + \left[\omega(h_k, n^{-1})\right]^{(1-\eta)/(1+\eta)}] < 1$, система уравнений (8.5) имеет единственное решение $x_n^*(t)$ и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{L_2} \le A[q + \omega(f, n^{-1})]$, где x^*- решение краевой задачи (8.1) – (8.2).

Для решения краевой задачи (8.1) – (8.2) можно предложить еще одну вычислительную схему, обладающую меньшей величиной погрешности.

Будем искать приближенное решение краевой задачи (8.1) – (8.2) в виде полинома (8.4), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы алгебраических уравнений

$$K_n x_n = P_n\Big[\sum_{k=0}^{m}\Big[a_k(t) x_n^{(k)}(t) + \frac{b_k(t)}{\pi i} \int\limits_\gamma \frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{2n} h_k(t, t_j) x_n^{(k)}(t_j) \int\limits_{t'_j}^{t'_{j+1}} \frac{d\tau}{|\tau - t|^\eta}\Big]\Big] = P_n[f(t)], \tag{8.6}$$

где $t'_{k+1} = e^{is'_{k+1}}$, $s'_{k+1} = \frac{2k+1}{2n+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Введем пространство $X^m = H_\beta^m$ функций, удовлетворяющих условию (8.2) и имеющих производную m-го порядка, входящую в класс Гельдера H_β с нормой $\|x\| = \sum\limits_{k=0}^{m}[||x^{(k)}||_C + H(x^{(k)};\beta)]$.

Теорема 8.3 [31]. Пусть оператор K, действующий из X^m в X, непрерывно обратим и выполнены условия 1. Тогда при n таких, что $q = An^{-\delta}\ln n < 1$, система уравнений (8.6) имеет единственное решение x_n^*, и в метрике пространства H_β справедливо неравенство $\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_{H_\beta} \leq An^{-(\alpha-\beta)}\ln^2 n$, где x^* – решение краевой задачи (8.1)-(8.2).

Аппроксимируем функцию $G_m(t) = (a_m(t) - b_m(t))/(a_m(t) + b_m(t))$ полигоном G_{mn}, построенным по n равноотстоящим узлам. Обозначим через $\psi_{mn}^{\pm}$ функции

$$\psi_{mn}^{\pm}(z) = \exp\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\ln G_{mn}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\Big\}.$$

Приближенное решение задачи (8.1) – (8.2) ищем в виде полинома (8.4), коэффициенты α_k которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv P_n\Bigg[\psi_{mn}^{-}(t)x_n^{(m)+}(t) - \psi_{mn}^{+}(t)x_n^{(m)-}(t) + \psi_{mn}^{-}(t)\sum_{k=0}^{m-1}\Bigg[a_k(t)x_n^{(k)}(t) +$$

$$+\frac{b_k(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{2n}h_k(t,t_j)x_n^{(k)}(t_j)\int\limits_{t'_j}^{t'_{j+1}}\frac{d\tau}{|\tau - t|^{\eta}}\Bigg] +$$

$$+\frac{\psi_{mn}^{-}(t)}{2\pi i}\sum_{j=0}^{2n}h_k(t,t_j)x_n^{(k)}(t_j)\int\limits_{t'_j}^{t'_{j+1}}\frac{d\tau}{|\tau - t|^{\eta}}\Bigg] = P_n[f(t)]. \qquad (8.7)$$

Теорема 8.4 [43], [44]. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда при n таких, что $q = An^{-\delta}\ln n < 1$, система уравнений (8.7) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq An^{-(\alpha-\beta)}\ln n$, где x^* – решение краевой задачи (8.1) – (8.2).

Приближенное решение задачи (8.3) – (8.2) ищем в виде полинома (8.4), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы уравнений

$$F_n x_n = \bar{P}_n\left[\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{P_n^{\tau}[h_k(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau)]}{\tau - t}\right]d\tau\right] =$$

$$= \bar{P}_n[f(t)]. \tag{8.8}$$

Теорема 8.5 [43], [44]. Пусть краевая задача (8.3) – (8.2) однозначно разрешима при любой правой части f и выполнены условия 3. Тогда при n таких, что $q = An^{-(r+\alpha-\beta)} \ln^2 n < 1$, система уравнений (8.8) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq An^{-(r+\alpha-\beta)} \ln^2 n$, где x^*– решение краевой задачи (8.3) – (8.2).

Приближенное решение задачи (8.3) – (8.2) ищем в виде полинома (8.4), коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных уравнений

$$F_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} \left[\varphi_n^-(t) x_n^{+(k)}(t) - \varphi_n^+(t) x_n^{-(k)}(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\varphi_n^-(t)}{\pi i} \int_\gamma P_n^\tau \left[\frac{h_k(t,\tau) - h_k(t,t)}{\tau - t} x_n^{(k)}(\tau) \right] d\tau \right] \right] = P_n[\varphi_n^-(t) f(t)], \tag{8.9}$$

где

$$\varphi_n^\pm(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\ln D_{mn}(\tau)}{\tau - z} \, d\tau \right\};$$

D_{mn}– полигон, аппроксимирующий по n равноотстоящим узлам функцию $D_m(t) = (a(t) - h(t,t))/(a(t) + h(t,t))$.

Теорема 8.6 [31]. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда при n таких, что $q = An^{-\alpha} \ln^2 n < 1$, система уравнений (8.9) имеет единственное решение x_n^* и $\|x^* - x_n^*\| \leq An^{-\alpha} \ln n$, где x^*– решение краевой задачи (8.3) – (8.2).

Теорема 8.7 [43], [44]. Пусть краевая задача (8.1) – (8.2) однозначно разрешима при любой правой части и выполнены условия 3. Тогда при n таких, что $q = An^{-(r+\alpha)} \ln n < 1$, система уравнений (8.5) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\|_{L_2} \leq$
$\leq An^{-(r+\alpha)} \ln n$, где x^*– решение краевой задачи (8.1) – (8.2).

Приближенное решение задачи (8.3), (8.2) будем искать в виде полинома (8.4), коэффициенты которого определяются из системы линейных уравнений

$$F_n x_n \equiv \bar{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} \left[\delta_n^-(t) x_n^{+(k)}(t) + \delta_n^+(t) x_n^{-(k)}(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\delta_n^-(t)}{\pi i} \int_\gamma P_n^\tau \left[\frac{h_k(t,\tau) - h_k(t,t)}{\tau - t} x_n^{(k)}(\tau) \right] d\tau \right] \right] = P_n[\delta_n^-(t) f(t)], \tag{8.10}$$

где

$$\delta_n^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\ln D_{mn}(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\right\},$$

$D_{mn}(t)-$ сплайн степени r дефекта 1 по разбиению $t_k = 2k\pi/n$, аппроксимирующий функцию $D_m(t) = (a_m(t) - h_m(t,t))/(a_m(t) + h_m(t,t))$.

Теорема 8.8 [31]. Пусть выполнены условия теоремы 8.7. Тогда при n таких, что $q = An^{-(r+\alpha)}\ln^2 n < 1$, система уравнений (8.10) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} \le An^{-(r+\alpha)}\ln n,$$

где x^*- решение краевой задачи (8.3), (8.2).

Замечание. Можно показать, что предыдущая теорема справедлива при

$$q = O\Bigg(\sum_{k=0}^{m}[E_n(a_k) + E_n(h_k)] +$$

$$+E_n\left(\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\ln\frac{a_m - b_m}{a_m + b_m}\frac{1}{\tau - t}\ d\tau\right\}\right)\Bigg)\ln^2 n \qquad (8.11)$$

и оценка погрешности имеет вид

$$\|x^* - x_n^*\| = O(E_n(f) + q). \qquad (8.12)$$

Не имея возможности (из-за отсутствия места) привести доказательства всех приведенных выше теорем, остановимся на доказательстве теорем 8.1 и 8.5. Доказательства остальных теорем могут быть получены объединением доказательств теорем 8.1 и 8.5 и теорем из
§ 2 и § 3 данной главы.

Доказательство теоремы 8.1. Сведем краевую задачу (8.1), (8.2) и уравнение (8.5) к эквивалентным краевым задачам. Для этого вводится функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau - z}.$$

Воспользуемся формулами Племеля $-$ Сохоцкого

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = x(t),\ \Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t}, \qquad (8.13)$$

$$\Phi^{(k)+}(t) - \Phi^{(k)-}(t) = x^{(k)}(t),\ \Phi^{(k)+}(t) + \Phi^{(k)+}(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{x^{(k)}(\tau)d\tau}{\tau - t}, \tag{8.14}$$

$k = 1, \ldots, m$. Подставляя равенства (8.13), (8.14) в уравнения (8.1) и (8.5), приходим к следующим краевым задачам:

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} \Big[(a_k(t) + b_k(t))\, \Phi^{(k)+}(t) - (a_k(t) - b_k(t))\, \Phi^{(k)-}(t) + \\ + \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \tfrac{h_k(t,\tau)\left(\Phi^{(k)+}(\tau) - \Phi^{(k)-}(\tau)\right)}{|\tau - t|^{\eta}} d\tau\Big] = f(t) \tag{8.15}$$

при условиях (8.2) и

$$K_n x_n \equiv P_n \Bigg[\sum_{k=0}^{m} \Big[(a_k(t) + b_k(t))\, \tilde{\Phi}^{(k)+}(t) - (a_k(t) - b_k(t))\, \tilde{\Phi}^{(k)-}(t) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} P_n^{\tau} \left[h_k(t,\tau) d(t,\tau) \left(\tilde{\Phi}^{(k)+}(\tau) - \tilde{\Phi}^{(k)-}(\tau)\right)\right] d\tau\Big]\Bigg] = \\ = P_n\left[f(t)\right]. \tag{8.16}$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{\Phi}^{+}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^{k+m}$, $\tilde{\Phi}^{-}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^{k}$.

Сведем краевые задачи (8.15), (8.2), и (8.16) к эквивалентным с.и.у. Для сведения к с.и.у. краевой задачи (8.15), (8.2) можно воспользоваться интегральным представлением Ю.М. Крикунова [103]. Для этого функции $\frac{d^m \Phi^{+}(z)}{dz^m}$ и $\frac{d^m \Phi^{-}(z)}{dz^m}$ представляются интегралом типа Коши с одной и той же плотностью

$$\frac{d^m \Phi^{+}(z)}{dz^m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{v(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \frac{d^m \Phi^{-}(z)}{dz^m} = \frac{z^{-m}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{v(\tau) d\tau}{\tau - z}. \tag{8.17}$$

Для сведения краевой задачи (8.16) к эквивалентному с.и.у. воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{d^m \tilde{\Phi}^{+}(z)}{dz^m} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{v_n(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \frac{d^m \tilde{\Phi}^{-}(z)}{dz^m} = \frac{z^{-m}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{v_n(\tau) d\tau}{\tau - z}, \tag{8.18}$$

где $v_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(m+k)!}{k!} \alpha_k t^k - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^m \alpha_{-k} \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} t^{-k}$.

Повторяя соответствующие рассуждения работы [103], с помощью представлений (8.17) и (8.18) сводим краевые задачи (8.15), (8.2) и (8.16) к эквивалентным с.и.у.:

$$K^{(1)}v \equiv a_1^* v(t) + \frac{b_1^*(t)}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{v(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\gamma \frac{h_0(t,\tau)d\tau}{|\tau - t|^\eta}\int\limits_\gamma k_0(\tau,\sigma)\ln(\tau-\sigma)v(\sigma)d\sigma +$$

$$+\ldots+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\gamma \frac{|h_m(t,\tau)|}{|\tau - t|^\eta}d\tau\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{v(\sigma)+\sigma^{-m}v(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma = f_1(t) \quad (8.19)$$

и

$$K_n^{(1)}v_n = P_n\Bigg[a_1^* v_n(t) + \frac{b_1^*(t)}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{v_n(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\gamma P_n^\tau\left[h_0(t,\tau)d(t,\tau)\left[\int\limits_\gamma k_0(\tau,\sigma)\ln(\tau-\sigma)v_n(\sigma)d\sigma\right]\right]d\tau +$$

$$+\ldots+\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_\gamma P_n^\tau\left[h_m(t,\tau)d(t,\tau)\left[\int\limits_\gamma \frac{v_n(\sigma)+\sigma^{-m}\tilde{v}(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma\right]\right]d\tau\Bigg] =$$

$$= P_n[f_1(t)], \quad (8.20)$$

где $k_0(t,\tau),\ldots,k_{m-1}(t,\tau)-$ фредгольмовы ядра, $a_1^*(t)$,$b_1^*(t)$,$f_1^*(t) \in C_{2\pi}$; явный вид этих функций может быть выписан на основании представления Ю.М.Крикунова [103] (явный вид этих функций не выписывается, так как ниже используются лишь их характеристики).

В нашем распоряжении выбор основного пространства X, в котором рассматривается уравнение (8.19). Будем считать, что $X-$ пространство квадратично суммируемых функций со скалярным произведением

$$(g_1,g_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_1(t)\overline{g_2(t)}ds, \quad t = e^{is}.$$

Приближенное решение $v_n(t)$ ищем в подпространстве $(2n+1)$ - мерных полиномов X_n вида $\left\{\sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k\right\}$ с той же нормой, что и пространство X. Очевидно, $K_n^{(1)} \in [X_n \to X_n]$.

Будем считать, что оператор $K^{(1)}$ имеет линейный обратный. (Это эквивалентно тому, что краевая задача (8.1), (8.2) однозначно разрешима при любом f).

Так как $\left\| \int\limits_\gamma k_0(\tau,\sigma)\ln(\tau-\sigma)v(\sigma)d\sigma \right\| \le A\|v\|, \left\| \int\limits_\gamma \frac{v(\sigma)}{(\sigma-\tau)}d\sigma \right\| \le A\|v\|$, где (как и всюду) $A-$ вполне определенные постоянные, не зависящие от v и n, то вместо уравнений (8.19), (8.20) можно ограничиться рассмотрением уравнений

$$K^{(1)}v \equiv a(t)v(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{v(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{h(t,\tau)v(\tau)}{|\tau-t|^\eta}d\tau = f(t), \quad (8.21)$$

$$K_n^{(1)}v \equiv P_n\left[a(t)v_n(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{v_n(\tau)d\tau}{\tau-t}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma P_n^\tau\left[h(t,\tau)d(t,\tau)v_n(\tau)\right]d\tau\right] = P_n[f(t)]. \quad (8.22)$$

Обоснование вычислительной схемы (8.22) приближенного решения уравнения (8.21) приведено в §§ 2,3.

Доказательство теоремы 8.5. Как и при доказательстве теоремы 8.1, сведем краевую задачу (8.3), (8.2) и уравнение (8.8) к эквивалентным с.и.у.

Для этого следует воспользоваться тождеством

$$\overline{P}_n\left[\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma\left[h(s,\sigma)\tilde{g}(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma\right] \equiv$$

$$\equiv \overline{P}_n\left[\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma\left[h(s,\sigma)\tilde{g}(\sigma)\right]\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right] \equiv$$

$$\equiv \overline{P}_n\left[\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma\left[h(s,\sigma)\right]\tilde{g}(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right], \quad (\tilde{g}\in X_n). \quad (8.23)$$

Воспользовавшись тождеством (8.23), уравнения (8.3), (8.8) можно представить в следующем виде:

$$Fx \equiv \sum_{k=0}^m \left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\frac{b_k(t)}{\pi i}\int\limits_\gamma \frac{x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{h_k(t,\tau)-h_k(t,t)}{\tau-t}x^{(k)}(\tau)d\tau\right] = f(t) \quad (8.24)$$

и

$$F_n x_n \equiv \overline{P}_n \left[\sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + \frac{b_k(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} P_n^{\tau}\left[\frac{(h_k(t,\tau) - h_k(t,t))x_n^{(k)}(\tau)}{\tau - t}\right]d\tau\right]\right] = \overline{P}_n[f], \qquad (8.25)$$

где $b_k(t) = h_k(t,t), n \geq m$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 8.1, уравнения (8.24), (8.2) и (8.25) можно свести к эквивалентным с.и.у. Поэтому обоснование вычислительной схемы (8.8) для краевой задачи (8.3), (8.2) сводится к обоснованию вычислительной схемы

$$F_n^{(1)} v_n \equiv \overline{P}_n \left[a(t)v_n(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{v_n(\tau)d\tau}{\tau - t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} P_n^{\tau}\left[\frac{(h(t,\tau) - h(t,t))v_n(\tau)}{\tau - t}\right]d\tau\right] = \overline{P}_n[f] \qquad (8.26)$$

для с.и.у.

$$F^{(1)} v \equiv a(t)v(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{v(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{h(t,\tau) - h(t,t)}{\tau - t}v(\tau)d\tau =$$

$$= f(t), \qquad (8.27)$$

где

$$a(t), b(t), f(t) \in H_{\alpha}, h(t,\tau) \in H_{\alpha,\alpha}\ (0 < \alpha \leq 1. \qquad (8.28)$$

Теперь доказательство теоремы 8.5 свелось к обоснованию вычислительной схемы (8.27) для уравнения (8.26) при условиях (8.28). Это исследование было проведено в § 3.

8.2. Приближенное решение нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на замкнутых контурах интегрирования

Выше было исследовано применение методов коллокации и механических квадратур к линейным с.и.д.у. Сейчас изучим применение этих методов к нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям вида

$$Kx \equiv a(t, x(t), \ldots, x^{(m)}(t)) + S_{\gamma}(h(t,\tau, x(\tau), \ldots, x^{(m)}(\tau))) = f(t) \qquad (8.29)$$

при условиях

$$\int\limits_{\gamma} x(t)t^{-k-1}dt = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{8.30}$$

В этих формулах под γ понимается единичная окружность с центром в начале координат,

$$a'_{u_i}(t, u_0, u_1, \ldots, u_m) \in H_{\alpha\cdots\alpha},\ h'_{u_i}(t, \tau, u_0, u_1, \ldots, u_m) \in H_{\alpha\cdots\alpha},$$

$$f(t) \in H_\alpha\ (i = 0, 1, \ldots, m). \tag{8.31}$$

Вычислительная схема. Приближенное решение краевой задачи (8.29), (8.30) ищется в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^{k+m} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k, \tag{8.32}$$

коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n^t[a(t, x_n(t), \ldots, x_n^{(m)}(t)) + S_\gamma(P_n^\tau[h(t, \tau, x_n(\tau), \ldots, x_n^{(m)}(\tau))])] =$$

$$= \bar{P}_n^t[f(t)]. \tag{8.33}$$

Обоснование метода. Сведем краевую задачу (8.29), (8.30) и аппроксимирующее ее уравнение (8.33) к эквивалентным нелинейным уравнениям.

Введя функции $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{x(\tau)}{\tau - z}d\tau$, $\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{x_n(\tau)}{\tau - z}d\tau$, и воспользовавшись формулами Племеля-Сохоцкого, приходим к уравнениям

$$Kx \equiv a(t, \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \ldots, \Phi^{(m)+}(t) - \Phi^{(m)-}(t)) +$$

$$+ S_\gamma(h(t, \tau, \Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau), \ldots, \Phi^{(m)+}(\tau) - \Phi^{(m)-}(\tau))) = f(t), \tag{8.34}$$

$$K_n x_n \equiv \bar{P}_n^t[a(t, \Phi_n^+(t) - \Phi_n^-(t), \ldots, \Phi_n^{(m)+}(t) - \Phi_n^{(m)-}(t)) +$$

$$+ S_\gamma(P_n^\tau[h(t, \tau, \Phi_n^+(\tau) - \Phi_n^-(\tau), \ldots, \Phi_n^{(m)+}(\tau) - \Phi_n^{(m)-}(\tau))])] =$$

$$= \bar{P}_n^t[f(t)]. \tag{8.35}$$

Воспользовавшись интегральным представлением Ю.М. Крикунова [103], уравнения (8.34) при условиях (8.2) и (8.35) сводятся к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям

$$K^{(1)}v \equiv a(t, \eta_0(v(t)), \ldots, \eta_m(v(t))) +$$

$$+ S_\gamma(h(t, \tau, \eta_0(v(\tau)), \ldots, \eta_m(v(\tau)))) = f_1(t), \tag{8.36}$$

$$K_n^{(1)}v_n \equiv \bar{P}_n^t[a(t,\eta_0(v_n(t)),\ldots,\eta_m(v_n(t)))]+$$
$$+S_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau,\eta_0(v_n(\tau)),\ldots,\eta_m(v_n(\tau)))])] = \bar{P}_n^t[f_1(t)], \qquad (8.37)$$

где

$$\eta_0(v(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma k_0(t,\tau)v(\tau)d\tau,\ \ldots,\ \eta_{m-1}(v(t)) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma k_{m-1}(t,\tau)v(\tau)d\tau,$$

$$\eta_m(v(t)) = \frac{1}{2}v(t)(1+t^{-m}) + S_\gamma(v(\tau) - t^{-m}S_\gamma(v(\tau))), \qquad (8.38)$$

$k_0(t,\tau),\ldots,k_m(t,\tau)-$ фредгольмовские ядра (явный вид этих функций выписан в [103]), $v-$ плотность интегрального представления Ю.М. Крикунова, $v_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n}\beta_k t^k$, β_k- постоянные, однозначно выражаемые через α_k.

Так как функции $\eta_i(v)(i=0,1,\ldots,m)$, определенные выражениями (8.38), – линейные операторы, то для простоты выкладок вместо уравнений (8.36) и (8.37) можно ограничиться уравнениями

$$K^{(2)}(v) \equiv a(t,v(t)) + S_\gamma(h(t,\tau,v(\tau))) = f(t) \qquad (8.39)$$

и

$$K_n^{(2)}(v_n) \equiv \bar{P}_n[a(t,v_n(t)) + S_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau,v_n(\tau))])] = \bar{P}_n[f(t)], \quad (8.40)$$

где $f(t)\in H_\alpha,\ a'_u(t,u)\in H_{\alpha,\alpha},\ h'_u(t,\tau,u)\in H_{\alpha,\alpha,\alpha}$ $(0<\alpha<1)$.

В нашем распоряжении выбор пространства, в котором будем проводить обоснование метода механических квадратур (8.40) для уравнения (8.39). Сначала остановимся на пространстве L_2. При этом приближенное решение ищется в подпространстве $\tilde{L}_2\subset L_2$, состоящем из полиномов степени не выше n. В этих условиях метод механических квадратур (8.40) для уравнения (8.39) обоснован в § 3. Воспользовавшись приведенными там результатами, приходим к следующей теореме.

Теорема 8.9 [45]. Пусть в некоторой сфере S краевая задача (8.29), (8.30) имеет единственное решение $x^*\in W^mH_\alpha$, и уравнение $K'(x^*)z=f$ при любом f имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (8.30). Тогда при n таких, что $q = A\ln^2 n/n^\alpha < 1$, система уравнений (8.33) имеет единственное решение x_n^*, и справедлива оценка $\|(x^*)^{(m)} - (x_n^*)^{(m)}\| \le A\ln n/n^\alpha$.

Возьмем теперь в качестве пространства, в котором проводится обоснование применения метода механических квадратур (8.40) к уравнению (8.39), пространство X функций, удовлетворяющих условию Гельдера H_β $(0 < \beta < \alpha)$ с нормой $\|x\| = \max|x(t)| + + \sup\limits_{t_2 \neq t_1}[|x(t_1) - x(t_2)|/|t_1 - t_2|^\beta]$. Приближенное решение ищется в пространстве $X_n \subset X$ полиномов степени не выше n.

Во втором параграфе проведено обоснование метода коллокации в пространстве X. Воспользовавшись результатами этого параграфа, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 8.10 [45]. Пусть в некоторой сфере S краевая задача (8.29), (8.30) имеет единственное решение $x^* \in W^m H_\alpha$, и уравнение $K'(x^*)z = f$ при любой правой части имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (8.30). Тогда при n таких, что $q = A_3 \ln^6 n/n^\alpha < 1$, система уравнений (8.33) имеет единственное решение $x_n^*(t)$, и справедлива оценка $\|(x^*)^{(m)} - (x_n^*)^{(m)}\| \leq A_4 \ln^2 n/n^\alpha$.

Ранее было показано, что сингулярные интегро-дифференциальные уравнения сводятся к сингулярным интегральным уравнениям. Поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением уравнения

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)S_\gamma(x(\tau)) + U_\gamma(h(t,\tau)x(\tau)) = f(t). \tag{8.41}$$

Будем считать, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $h(t,\tau)$, (по обеим переменным) $f(t)$ удовлетворяют интегральному условию Гельдера $H_p^{(r+\alpha)}$ $(0 < \alpha < 1)$, а решения этого уравнения $\in L_p$ $(1 < p < \infty)$. Предположим, что оператор K непрерывно обратим в L_p. Будем решать уравнение (8.41) методом моментов. Для этого предварительно сведем его к краевой задаче Римана

$$K^{(1)}x \equiv Vx + Wx = y,$$

где $Vx \equiv \psi^- x^+ - \psi^+ x^-,\ Wx = lU_\gamma(h(t,\tau)x(\tau)),\ y = lf,$

Приближенное решение уравнения $K^{(1)}x = y$ ищется в виде полинома $x_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k$, коэффициенты которого определяются из системы

$$K_n^{(1)} x_n \equiv V_n x_n + W_n x_n = y_n, \tag{8.42}$$

где

$$y_n = \Phi_n[y],\ l = \psi^-/(a+b),\ \psi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \ln\left[\frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right]\frac{1}{\tau - z}d\tau\right\},$$

$$V_n x_n = \Phi_n[Vx_n],\ W_n x_n = \Phi_n[lU_\gamma(\Phi_n^\tau[h(t,\tau)x_n(\tau)])].$$

Φ_n- оператор проектирования на n частную сумму ряда Фурье.

Введем полином $\tilde{\varphi}(x_n) = V_n^* x_n + U_\gamma(T_n^t[h(t,\tau)]x_n(\tau))$, где $V_n^* x_n = = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-$, $\psi_n = T_n[\psi]$, T_n- оператор проектирования на множество полиномов наилучшего приближения степени не выше n в метрике L_p. Оценим норму $\|K^{(1)}x_n - \tilde{\varphi}(x_n)\| \leq |x_n^+|\|\psi^- \psi_n^-\| + +|x_n^-|\|\psi^+ - \psi_n^+\| + A\|h(t,\tau) - T_n[h(t,\tau)]\||x_n|$.

Так как x_n- полином степени не выше n, то $|x_n| \leq n^{1/p}\|x_n\|$. Поэтому, воспользовавшись оценками работы [134], имеем $\|K_1 x_n - -\tilde{\varphi}(x_n)\| \leq An^{-(r+\alpha-1/p)}\|x_n\|$. Так как $\|\Phi_n\| = 1$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 8.11 [44], [45]. Пусть оператор K непрерывно обратим в L_p $(1 < p < \infty)$, и функции $a(t)$, $b(t)$, $h(t,\tau)$ (по обеим переменным), $f(t)$ удовлетворяют интегральному условию Гельдера $H_p^{(r+\alpha)}$ (если $r = 0$, то $\alpha > 1/p$). Тогда при n таких, что $q = An^{-(r+\alpha-1/p)} < 1$, система уравнений (8.42) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq An^{-(r+\alpha-1/p)}$.

Замечание. Распространение этих утверждений на случай сингулярных интегро-дифференциальных уравнений не представляет труда.

8.3. Приближенное решение линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами

В этом и следующем пунктах изучаются прямые (без регуляризации) методы приближенного решения с. и. д. у. с разрывными коэффициентами и на разомкнутых контурах интегрирования. Впервые приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами изучались в монографии [82], в которой был предложен эффективный алгоритм сведения сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами к эквивалентным сингулярным интегральным уравнениям с непрерывными коэффициентами.

Рассмотрим сначала сингулярные интегро-дифференциальные уравнения вида

$$Kx \equiv \sum_{k=0}^{m} [a_k(t)x^{(k)}(t) + b_k(t)S_\gamma(x^{(k)}(\tau)) +$$

$$+U_\gamma(h_k(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x^{(k)}(\tau))] = f(t) \qquad (8.43)$$

при условиях

$$\int_\gamma x(t)t^{-k-1}dt = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (8.44)$$

где $a_k(t), b_k(t), h_k(t,\tau)$ $(k = \overline{0,m}), f(t)$– функции, непрерывные в метрике C всюду на γ, за исключением точки $t = 1$, в которой $a_k(t)$ и $b_k(t)$ $(k = \overline{0,m})$ имеют разрыв 1 рода.

Приближенное решение краевой задачи (8.43), (8.44) ищется в виде полинома (8.32), коэффициенты которого определяются из системы алгебраических уравнений

$$K_n x_n \equiv P_n\Big[\sum_{k=0}^{m}[a_k(t)x_n^{(k)}(t) + b_k(t)S_\gamma(x_n^{(k)}(\tau)) +$$

$$+U_\gamma(P_n^\tau[h_k(t,\tau)d(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau)])]\Big] = P_n[f(t)], \tag{8.45}$$

где $d(t,\tau) = |\tau - t|^{-\eta}$ при $|\sigma - s| \geq 2\pi/(2n+1)$, $d(t,\tau) = |e^{i2\pi/(2n+1)} - 1|^{-\eta}$ при $|\sigma - s| \leq 2\pi/(2n+1)$, $t = e^{is},\ \tau = e^{i\sigma}$.

Точно так же, как и в случае с. и. д. у. с непрерывными коэффициентами, краевая задача (8.43), (8.44) и система (8.45) сводятся к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению и аппроксимирующей его алгебраической системе. Вместо них целесообразно ограничиться уравнениями

$$Kx \equiv a(t)x(t) + b(t)S_\gamma(x(\tau)) + U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)) = f(t) \tag{8.46}$$

и

$$K_n x_n \equiv P_n[a(t)x_n(t) + b(t)S_\gamma(x_n(\tau)) + U_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] =$$

$$= P_n[f(t)], \tag{8.47}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ имеют разрыв первого рода в точке $t = 1$.

В качестве пространства, в котором проводится обоснование вычислительной схемы (8.47), возьмем пространство L_2.

Подобно выкладкам, приведенным в § 3, уравнениям (8.46) и (8.47) поставим в соответствие промежуточные уравнения

$$\tilde{K}x \equiv a_m(t)x(t) + b_m(t)S_\gamma(x(\tau)) + U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)) = f(t)$$

и

$$\tilde{K}_n x_n \equiv P_n[a_m(t)x_n(t) + b_m(t)S_\gamma(x_n(\tau)) + U_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] =$$

$$= P_n[f(t)],$$

где $a_m(t)$ и $b_m(t)$, $m = [n^{1/2}]$– полигоны, аппроксимирующие функции $a(t)$ и $b(t)$ по m равноотстоящим узлам, причем при построении полигонов $a_m(t)$ и $b_m(t)$ в точке $t = 1$ используются предельные значения $a(1+0), a(1-0)$ и $b(1+0), b(1-0)$.

Переход от уравнения $Kx = f$ к уравнению $\tilde{K}x = f$ и от уравнения $\tilde{K}_n x_n = f_n$ к уравнению $K_n x_n = f_n$ проводится по теореме Банаха.

Уравнения $\tilde{K}x = f$ и $\tilde{K}_n x_n = f_n$ сводятся к эквивалентным краевым задачам

$$K^{(1)}x \equiv x^+(t) - G(t)x^-(t) + D(t)U_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)) = \\ = D(t)f(t), \tag{8.48}$$

$$K_n^{(1)}x_n \equiv P_n[x_n^+(t) - G(t)x_n^-(t) + D(t)U_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])] = \\ = P_n[D(t)f(t)], \tag{8.49}$$

где $G(t) = S(t)D(t),\ S(t) = a_m(t) - b_m(t),\ D(t) = (a_m(t) + b_m(t))^{-1}$.

Пусть решение краевой задачи $\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = (t-1)^\delta \varphi_0(t),\ \text{где } \delta = \zeta + i\xi,\ \varphi_0 \in H.$$

Как и в случае сингулярных интегральных уравнений с непрерывными коэффициентами, уравнения (8.48), (8.49) можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$K^{(2)}x \equiv Vx + Wx = y, \tag{8.50}$$

$$K_n^{(2)}x_n \equiv V_n x_n + W_n x_n = y_n, \tag{8.51}$$

где

$$Vx = \psi^- x^+ - \psi^+ x^-,\ \ Wx = lU_\gamma(h(t,\tau)|\tau - t|^{-\eta}x(\tau)),\ l = \frac{\psi^-}{a+b}, y = lf,$$

$$y_n = P_n[y], V_n x_n = P_n[Vx_n],\ W_n x_n = P_n[lU_\gamma(P_n^\tau[h(t,\tau)d(t,\tau)x_n(\tau)])],$$

$$\psi(z) = \begin{cases} (z-1)\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \ln[S(\tau)D(\tau)](\tau - z)^{-1}d\tau\right\} & \text{при} \quad \zeta \le 0, \\ \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \ln[S(\tau)D(\tau)](\tau - z)^{-1}d\tau\right\} & \text{при} \quad \zeta > 0. \end{cases}$$

Для обоснования предложенной вычислительной схемы введем полином

$$\tilde{\varphi}(t) = V_n^* x_n + U_\gamma(T_n^t[l(t)h(t,\tau)d^*(t,\tau)]x_n(\tau)),$$

где $V_n^* x_n = \psi_n^- x_n^+ - \psi_n^+ x_n^-$, $\psi_n = T_n^t(\psi)$, T_n^t– оператор проектирования на множество тригонометрических полиномов наилучшего равномерного приближения степени не выше n по переменной t, $d^*(t,\tau) =$

$= |\tau - t|^{-\eta}$ при $|\tau - t| \geq \rho$, $d^*(t,\tau) = \rho^{-\eta}$ при $|\tau - t| \leq \rho$, ρ фиксируется ниже. Можно показать, что (модуль непрерывности функций $a_m(e^{is})$ и $b_m(e^{is})$ определяется в открытом промежутке $0 < s < 2\pi$)

$$\|K^{(2)}x_n - \tilde{\varphi}\| \leq A[w(a_m; n^{-1}) + w(b_m; n^{-1}) + w(\psi; n^{-1}) +$$
$$+ w(h; n^{-1})\rho^{1-\eta} + \rho^{-2\eta}n^{-\eta} + n^{\theta}]\|x_n\|, \qquad (8.52)$$
$$\|P_nK^2x_n - \tilde{\varphi}\| \leq A[w(a_m; n^{-1}) + w(b_m; n^{-1}) + w(\psi; n^{-1}) +$$
$$+ w(h; n^{-1})\rho^{1-\eta} + \rho^{-2\eta}n^{-\eta} + n^{\theta}]\|x_n\|, \qquad (8.53)$$

где $\theta = -(1 - |\zeta|)$ при $\zeta \leq 0$, $\theta = -\zeta$ при $\zeta > 0$.

Теперь осталось оценить $\|P_nK^{(2)}x_n - K_n^{(2)}x_n\|$. Повторяя рассуждения, сделанные в § 4, получаем оценку

$$\|P_nK^{(2)}x_n - K_n^{(2)}x_n\| \leq A[w(h; n^{-1}) + \rho^{-2\eta}n^{-\eta}]\|x_n\|. \qquad (8.54)$$

Из оценок (8.52)–(8.54), полагая для определенности $\rho = n^{-\eta/(1+\eta)}$, получаем следующее утверждение.

Теорема 8.12 [45]. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве L_2, коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $h(t,\tau)$, $f(t) \in C$ всюду на γ, за исключением точки $t = 1$, в которой $a(t)$, $b(t)$ имеют разрыв первого рода. Тогда при n таких, что

$$q = A[w(a; n^{-1/2}) + w(b; n^{-1/2}) + w(\psi; n^{-1}) + (w(h; n^{-1}))^{(1-\eta)/(1+\eta)} + n^{\theta} +$$
$$+ n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)}] < 1,$$

система уравнений (8.45) имеет единственное решение x_n^*. Справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq A[q + w(f; n^{-1})]$, где x^*– решение уравнения (8.45). Здесь $\theta = -(1 - |\zeta|)$ при $\zeta \leq 0$, $\theta = -\zeta$ при $\zeta > 0$, $\delta = \zeta + i\xi$, $(t-1)^{\delta}\varphi_0(t)$– решение краевой задачи
$\psi^+(t) = [(a_m(t) - b_m(t))/(a_m(t) + b_m(t))]\psi^-(t)$.

Следствием теоремы 8.12 является предложение:

Теорема 8.13. [45]. Пусть краевая задача (8.43), (8.44) имеет единственное решение при любой правой части и выполнены условия $a_k(t)$, $b_k(t)$, $h_k(t,\tau)$ $(k = \overline{0,m})$, $f(t) \in C$ всюду, за исключением точки $t = 1$, в которой $a_m(t)$ и $b_m(t)$ имеют разрыв первого рода. Тогда при n таких, что $q = A\max_{0\leq k\leq m}[w(a_k; n^{-1}) + w(b_k; n^{-1}) + w(\psi; n^{-1}) + w(h_k; n^{-1}) + n^{\theta} +]. + n^{-\eta(1-\eta)/(1+\eta)}] < 1$, система уравнений (8.45) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq A[q +$
$+ w(f; n^{-1})]$, где x^*– решение краевой задачи (8.43), (8.44). Здесь

$\theta = -(1-|\zeta|)$ при $\zeta \le 0$, $\theta = -\zeta$ при $\zeta > 0$, $\delta = \zeta + i\xi$, $(t-1)^{\delta}\varphi_0(t)-$ решение краевой задачи $\Phi^+(t) = [(a_m(t) - b_m(t))/(a_m(t)+b_m(t))]\Phi^-(t)$.

8.4. О другом подходе к обоснованию приближенных методов решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

В пунктах 8.1 – 8.3 изложен метод приближенного решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, обоснование которого основано на применении представления Ю.М. Крикунова. Другой подход к обоснованию приближенных методов решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений был предложен автором в 1971 г., но из-за задержки по техническим причинам (большой объем первоначальной рукописи) публикации статьи [21], был опубликован только в 1974 г., т.е. через 2 года после выхода из печати статьи [43] (см. также [44], [46]).

Приведем основные элементы этого метода. Для краткости остановимся только на нелинейных с.и.д.у.

Рассмотрим с.и.д.у.

$$Kx \equiv a(t, x(t), \ldots, x^{(m)}(t)) +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{h(t,\tau,x(\tau),\ldots,x^{(m)}(\tau))}{\tau - t}d\tau = f(t) \qquad (8.55)$$

при условиях

$$\int\limits_{\gamma} x(t)t^{-k-1}dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (8.56)$$

где $\gamma-$ единичная окружность с центром в начале координат. Будем считать, что $f(t) \in H_{\alpha}$, $a'_{u_i}(t, u_0, \ldots, u_m) \in H_{\alpha,1,\ldots,1}$, $h''_{u_i}(t,\tau,u_0,\ldots,u_m) \in$
$\in H_{\alpha,1,\ldots,1}$, $i = 0, \ldots, m$.

Приближенное решение задачи (8.55), (8.56) ищется в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^{k+m} + \sum_{k=-n}^{-1} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы уравнений

$$K_n x_n \equiv$$

$$\equiv P_n\left\{a(s, x_n(s), \ldots, x_n^{(m)}(s)) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[P_n^{\sigma}[[h(s,\sigma,x_n(\sigma),\ldots,x_n^{(m)}(\sigma))]-\right.$$

$$-i[[h(s,s,x_n(\sigma),\dots,x_n^{(m)}(\sigma))-h(s,s,x_n(s),\dots,x_n^{(m)}(s))]\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}]-$$

$$-i\sum_{k=0}^{2n}{}'\Big[[h(s,s_k,x_n(s_k),\dots,x_n^{(m)}(s_k))-$$

$$-h(s,s,x_n(s_k),\dots,x_n^{(m)}(s_k))]\mathrm{ctg}\frac{s_k-s}{2}\psi_k(\sigma)\Big]\,d\sigma\Big\}=P_n[f(s)], \tag{8.57}$$

где P_n - оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов по узлам $s_k=2k\pi/(2n+1)$, $k=0,\dots,2n$, $a(s)=a(e^{is})$, $x_n^{(j)}(s)=x_n^{(j)}(e^{is})$, $j=0,\dots,m$, $\sum\limits_{k}{}'\varphi_{kj}$ означает суммирование по $k\neq j$, $\psi_k(s)-$ фундаментальные тригонометрические полиномы степени n по узлам s_k.

Введем следующие пространства функций: $X=H_\beta^m-$ пространство функций, удовлетворяющих условию (8.56) и имеющих производную m порядка, входящую в класс Гельдера H_β, с нормой

$$\|x\|=M^{(m)}(x)+H^{(m)}(x;\beta)=\sum_{k=0}^{m}\max_{t\in L}|x^{(k)}(t)|+$$

$$+\sup_{t_2\neq t_1}|x^{(m)}(t_2)-x^{(m)}(t_1)|/|t_2-t_1|^\beta;$$

$Y-$ пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера H_β с нормой $\|y\|=M^{(0)}(y)+H^{(0)}(y)$; $X_n\subset X-$ пространство функций вида $x_n(t)$; $Y_n\subset Y-$ пространство полиномов степени не выше n.

Обоснование метода проводится при $\beta<\alpha/2$. Операторы K и K_n имеют производные Фреше K' и $K_n{}'$ в пространствах X и X_n.

В произвольной точке $\xi\in X$ эти производные имеют вид

$$K'(\xi)z\equiv\sum_{j=0}^{m}a_j'(t,\xi(t),\xi'(t),\dots,\xi^{(m)}(t))z^{(j)}(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma\frac{h_j'(t,\xi(\tau),\xi'(\tau),\dots,\xi^{(m)}(\tau))z^{(j)}(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$K_n'(\xi)z_n\equiv P_n\left[\sum_{j=0}^{m}a_j'(s,\xi(s),\xi'(s),\dots,\xi^{(m)}(s))z_n^{(j)}(s)+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P_n^\sigma\left[\sum_{j=0}^{m}h_j'(s,\sigma,\xi(\sigma),\xi'(\sigma),\dots,\xi^{(m)}(\sigma))z_n^{(j)}(\sigma)\right]d\sigma-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_n^\sigma \left[\sum_{j=0}^m \left[h'_j(s,s,\xi(\sigma),\xi'(\sigma),\ldots,\xi^{(m)}(\sigma))z_n^{(j)}(\sigma)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-h'_j(s,s,\xi(s),\xi'(s),\ldots,\xi^{(m)}(s))z_n^{(j)}(s)\right]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{j=0}^m\left[\sum_{k=0}^{2n}{}'\left[h'_j(s,s_k,\xi(s_k),\xi'(s_k),\ldots,\xi^{(m)}(s_k))z_n^{(j)}(s_k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-h'_j(s,s,\xi(s_k),\xi'(s_k),\ldots,\xi^{(m)}(s_k))z_n^{(j)}(s_k)\right]\psi_k(\sigma)\right]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\Big].$$

Здесь через $a'_j(s,u_0,u_1,\ldots,u_m)$ и $h'_j(s,\sigma,u_0,u_1,\ldots,u_m)$ обозначены производные от функций $a(s,u_0,u_1,\ldots,u_m)$ и $h(s,\sigma,u_0,u_1,\ldots,u_m)$ по переменной u_j, $j=0,1,\ldots,m$. Остальные обозначения приведены в описании формулы (8.57).

Нетрудно показать, что справедливо неравенство

$$\|K'(x_1)-K'(x_2)\| < A\|x_1-x_2\|.$$

Воспользовавшись неравенством М. Рисса [192], можно показать, что $\|K'_n(x_{n1})-K'_n(x_{n2})\| \le An^\beta\ln^2 n\|x_{n1}-x_{n2}\|$. Пусть $x^*\in H_\alpha-$ решение задачи (8.55), (8.56), и пусть существует ограниченный правый обратный оператор $R(x^*)=[K'(x^*)]_r^{-1}$ с нормой B_0. При n таких, что $q_1=A/n^{\alpha-\beta}<1$, оператор $K'(x_n^0)$, $x_n^0=T_nx^*$, имеет ограниченный правый обратный $R(x_n^0)$ с нормой $\|R(x_n^0)\|\le B_0/(1-q_1)$. Здесь
T_n- оператор проектирования на полиномы наилучшего приближения степени n в равномерной метрике.

Выше в §§ 2-4 неоднократно использовался прием, заключающийся в сведении исходного сингулярного интегрального уравнения и аппроксимирующей его системе алгебраических уравнений к эквивалентной краевой задаче Римана и аппроксимирующей ее системе алгебраических уравнений. В данном случае этот прием заключается в следующем.

Рассмотрим уравнение $K'(\xi)x=f$. Для простоты обозначений представим это уравнение в виде

$$Gx\equiv\sum_{k=0}^m\left[a_k(t)x^{(k)}(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]=f(t).$$

Метод коллокации для уравнения $Gx=f$ имеет вид

$$G_nx_n\equiv\sum_{k=0}^m P_n\left[a_k(t)x_n^{(k)}(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\gamma\frac{h_k(t,\tau)x_n^{(k)}(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]=P_n[f(t)].$$

Выделим отдельно характеристический оператор со старшей производной

$$Gx \equiv a_m(t)x^{(m)}(t) + \frac{h_m(t,t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x^{(m)}(\tau)}{\tau - t}d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{h_m(t,\tau) - h_m(t,t)}{\tau - t}x^{(m)}(\tau)d\tau +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_k(t)x^{(k)}(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{h_k(t,\tau)x^{(k)}(\tau)}{\tau - t}d\tau\right] = f(t). \qquad (8.58)$$

Представим уравнение (8.58) в виде

$$Gx \equiv a_m(t)x^{(m)}(t) + \frac{h_m(t,t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{x^{(m)}(\tau)}{\tau - t}d\tau + H(x, x', \ldots, x^{(m-1)}) =$$

$$= f(t). \qquad (8.59)$$

Повторяя выкладки, неоднократноприведенные выше, сведем уравнение (8.59) к краевой задаче

$$G^{(1)}x \equiv \psi^-(t)x^{(m)+}(t) - \psi^+(t)x^{(m)-}(t) + lH(x, x', \ldots, x^{(m-1)}) =$$

$$= l(t)f(t), \qquad (8.60)$$

где $\psi(t)-$ решение краевой задачи $\psi^+(t) = G(t)\psi^-(t)$, $G(t) = (a_m(t) -$
$-b_m(t))/(a_m(t) + b_m(t)$, $b_m(t) = h_m(t,t)$, $l(t) = \psi^-(t)/(a_m(t) + b_m(t))$.

Метод коллокации для краевой задачи (8.60) записывается в виде операторного уравнения

$$G_n^{(1)}x_n^{(m)} \equiv P_n[\psi^-(t)x_n^{(m)+}(t) - \psi^+(t)x_n^{(m)-}(t) + l(t)H(x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m-1)})] =$$

$$= P_n[f(t)].$$

где $x_n^{(m)}(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n}\alpha_k t^k$.

Введем полином

$$\varphi_n(t) = \psi_n^-(t)x_n^{(m)+}(t) - \psi_n^+(t)x_n^{(m)-}(t) + T_n[l(t)H(x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m-1)})],$$

где $\psi_n^{\pm}(t) = T_n[\psi^{\pm}(t)]$, T_n- оператор проектирования на множество полиномов степени n наилучшего равномерного приближения. Отметим, что наилучшие приближения к функциям $\psi^+(t)$ и $\psi^-(t)$ строятся таким образом, чтобы полиномы $\psi_n^+(t)$ и $\psi_n^-(t)$ были функциями, аналитическими внутри и вне единичной окружности, соответственно.

Оценим нормы $\|G^{(1)}x_n - \varphi_n\|$ и $\|P_n K^{(1)}x_n - \varphi_n\|$. Для этого нужно оценить нормы $\|\psi^{\mp}x_n^{(m)\pm} - \psi_n^{\pm}x_n^{(m)\mp}\|$ и $\|R_n[l(t)H(x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m-1)}\|$, где $R_n = E - T_n, E-$ тождественный оператор.

Первая из этих норм неоднократно оценивалась выше. Для оценки второй нормы достаточно заметить, что оператор $H(x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m-1)})$ не зависит от функции $x_n^{(m)}$ и, следовательно, в метрике пространства X справедлива оценка $\|R_n[lH(x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m-1)})]\| \leq An^{1-\beta}\|x_n\|$. Отметим, что при ее получении было использовано неравенство
М. Рисса.

Таким образом, из общей теории приближенных методов следует, что оператор $G_n^{(1)}$ непрерывно обратим. Из обратимости оператора $G_n^{(1)}$ следует обратимость оператора G_n. Доказательство этого утверждения неоднократно приводилось выше.

Воспользовавшись результатами предыдущих пунктов можно показать, что при $q_2 = \max\{q_1, A\ln^2 n/n^{\alpha-\beta}\} < 1$ оператор $K_n'(x_n^0)$ имеет линейный обратный с нормой $\|[K_n'(x_n^0)]^{-1}\| \leq A\ln n$.

Теорема 8.14 [21]. Пусть краевая задача (8.55), (8.56) имеет в некоторой сфере S единственное решение x^*, существует ограниченный правый обратный оператор $[K'(x^*)]_r^{-1}$. Тогда при n таких, что $q = A\ln^5 n/n^{\alpha-2\beta} < 1$, уравнение (8.57) имеет такое решение x_n^*, что $\|x^* - x_n^*\| \leq A\ln^2 n/n^{\alpha-\beta}$.

ГЛАВА IV
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе исследуются приближенные методы решения полисингулярных и многомерных сингулярных интегральных уравнений.

1. Приближенное решение краевых задач в бицилиндрических областях

Пусть в плоскости комплексного переменного z_k $(k=1,2)$ дана единичная окружность γ_k с центром в начале координат, делящая ее на две части: внутреннюю D_k^+ и внешнюю D_k^-. Общую часть границ бицилиндрической области $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} D_2^{\pm}$ обозначим через $\gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2$. Будем искать функции $\varphi^{\pm\pm}(t_1,t_2)$, аналитические в областях $D^{\pm\pm}$, исчезающие в бесконечно удаленных точках областей $D^{\pm\mp}$ и D^{--} и удовлетворяющие краевому условию

$$K\varphi \equiv a(t_1,t_2)\varphi^{++}(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)\varphi^{+-}(t_1,t_2) + c(t_1,t_2)\varphi^{-+}(t_1,t_2)+$$
$$+d(t_1,t_2)\varphi^{--}(t_1,t_2) = f(t_1,t_2). \tag{1.1}$$

Следует отметить, что приводимые ниже результаты справедливы и в полицилиндрических областях. Мы рассматриваем краевую задачу (1.1) в бицилиндрической области только для простоты обозначений.

Краевую задачу (1.1) можно рассматривать при различных предположениях. Будем считать, что функции a,b,c,d не обращаются в нуль на γ_{12}, а коэффициенты a,b,c,d и правая часть f уравнения (1.1) удовлетворяют условию Гельдера $H_{\alpha\alpha}$ $(0<\alpha<1)$.

Предположим, что функции a,b,c,d допускают следующую факторизацию: существуют кусочно-аналитические функции $\psi^{\pm\mp}(z_1,z_2)$, отличные от нуля в соответствующих областях и являющиеся решениями уравнений

$$\psi^{++}(t_1,t_2) = a(t_1,t_2)\psi^{--}(t_1,t_2), \tag{1.2}$$

$$\psi^{+-}(t_1,t_2) = b(t_1,t_2)\psi^{-+}(t_1,t_2), \tag{1.3}$$

$$\psi^{-+}(t_1,t_2) = c(t_1,t_2)\psi^{+-}(t_1,t_2), \tag{1.4}$$

$$\psi^{--}(t_1,t_2) = d(t_1,t_2)\psi^{++}(t_1,t_2). \tag{1.5}$$

В общем случае нахождение решений $\psi^{\pm\pm}$ этих уравнений является трудной задачей, однако в ряде случаев можно указать ее решение в замкнутой форме. Во-первых, если функции a,b,c,d имеют вид

$a(t_1,t_2) = a_1(t_1)a_2(t_2)$, $b(t_1,t_2) = b_1(t_1)b_2(t_2)$, $c(t_1,t_2) = c_1(t_1)c_2(t_2)$, $d(t_1,t_2) = d_1(t_1)d_2(t_2)$, то указанные уравнения разрешимы в замкнутой форме. Это следует из того, что каждое из этих уравнений распадается на два одномерных уравнения. Для определенности остановимся на уравнении $\psi^{++}(t_1,t_2) = a(t_1,t_2)\psi^{--}(t_1,t_2)$. Это уравнение можно переписать в виде $\psi^{+}(t_1)\psi^{+}(t_2) = a_1(t_1)a_2(t_2)\psi^{-}(t_1)\psi^{-}(t_2)$, что эквивалентно двум уравнениям $\psi^{+}(t_1) = a_1(t_1)\psi^{-}(t_1)$, $\psi^{+}(t_2) = a_2(t_2)\psi^{-}(t_2)$.

Решения этих уравнений приведены в § 7 главы I.

Во-вторых, в монографии [88] показано, что факторизации: 1) $A(t,\omega) = t^p\omega^q x^{\pm\pm}(t,\omega)x^{\pm\mp}(t,\omega)$, 2) $A(t,\omega) = t^p\omega^q x^{\pm\pm}(t,\omega)x^{\mp\mp}(t,\omega)$, 3) $A(t,\omega) = t^p\omega^q x^{\pm\pm}(t,\omega)x^{\mp\pm}(t,\omega)$, имеют место тогда и только тогда, когда функция $\varphi(t,\omega) = \ln A_0(t,\omega)$ $(A(t,\omega) = t^p\omega^q A_0(t,\omega))$ удовлетворяет соответствующим условиям:

$$1)\,(I \mp S_1)\varphi = 0, \quad 2)\,(I \mp S_2)\varphi = 0, \quad 3)\,(I \mp S_{12})\varphi = 0.$$

Здесь

$$S_1\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\varphi(\tau_1,t_2)}{\tau_1 - t_1}\,d\tau_1, \quad S_2\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi(t_1,\tau_2)}{\tau_2 - t_2}\,d\tau_2,$$

$$S_{12}\varphi = -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)},$$

p и q – частные индексы функции $A(t,\omega)$. Предполагается, что $|A(t,\omega)| > 0$.

Приведенные факторизации называются вырожденными, и они являются решениями уравнений (1.2) – (1.5). Эти решения имеют вид

$$\psi^{\pm\pm} = \exp\left[\left(P^{\pm\pm}\ln A_0\right)(t,\omega)\right],$$

где $P^{\pm\pm}$ – оператор проектирования на $D^{\pm\pm}$, удовлетворяющий условиям

$$P^{++} - P^{+-} - P^{-+} + P^{--} = I,$$
$$P^{++} + P^{+-} + P^{-+} + P^{--} = S_{12},$$
$$P^{++} - P^{+-} + P^{-+} - P^{--} = S_,1$$
$$P^{++} + P^{+-} - P^{-+} - P^{--} = S_2.$$

Возвращаясь к уравнению (1.1), будем искать его приближенное решение в виде функций

$$\varphi_n^{++}(t_1,t_2) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{l=0}^{n}\alpha_{kl}t_1^k t_2^l}{\psi^{++}(t_1,t_2)}, \qquad \varphi_n^{+-}(t_1,t_2) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{l=-n}^{-1}\alpha_{kl}t_1^k t_2^l}{\psi^{+-}(t_1,t_2)},$$

$$\varphi_n^{-+}(t_1,t_2)=\frac{\sum\limits_{k=-n}^{-1}\sum\limits_{l=0}^{n}\alpha_{kl}t_1^k t_2^l}{\psi^{-+}(t_1,t_2)},\qquad \varphi_n^{--}(t_1,t_2)=\frac{\sum\limits_{k=-n}^{-1}\sum\limits_{l=-n}^{-1}\alpha_{kl}t_1^k t_2^l}{\psi^{--}(t_1,t_2)},$$

где ψ^{++}, ψ^{+-}, ψ^{-+}, ψ^{--} –, соответственно, решения уравнений (1.2) – (1.5). Коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$ этих уравнений определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$K_n\varphi_n=P_{nn}\left[a\varphi_n^{++}+b\varphi_n^{+-}+c\varphi_n^{-+}+d\varphi_n^{--}\right]=P_{nn}[f], \tag{1.6}$$

где $P_{nn}=P_n^{t_1}P_n^{t_2}$.

Обоснование описанной вычислительной схемы будем проводить в пространстве E функций, аналитических в соответствующих областях $D^{\pm\pm}$ и удовлетворяющих по обеим переменным условию Гельдера H_β $(0<\beta<\alpha)$ с нормой

$$\|x(t_1,t_2)\|=\max_{t_1,t_2\in\gamma_{12}}|x(t_1,t_2)|+\max_{t_2\in\gamma_2}\sup_{t_1'\neq t_1''}\frac{|x(t_1',t_2)-x(t_1'',t_2)|}{|t_1'-t_1''|^\beta}+$$

$$+\max_{t_1\in\gamma_1}\sup_{t_2'\neq t_2''}\frac{|x(t_1,t_2')-x(t_1,t_2'')|}{|t_2'-t_2''|^\beta}.$$

Будем считать, что оператор K непрерывно обратим в E.

Теорема 1.1 [25], [28]. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве E, функции a,b,c,d не обращаются в нуль на контуре γ_{12}, удовлетворяют условию Гельдера $H_{\alpha\alpha}$ $(0<\alpha<1)$. Пусть, кроме того, имеют место факторизации (1.2) – (1.5). Тогда при n таких, что $q=An^{-(\alpha-\beta)}\ln^2 n<1$, система уравнений (1.6) имеет единственное решение φ_n^* и справедлива оценка $\|\varphi^*-\varphi_n^*\|\le An^{-(\alpha-\beta)}\ln^2 n$, где
φ^* – решение уравнения (1.1).

Доказательство. Оценим величину $\|K\varphi_n-K_n\varphi_n\|$. Нетрудно видеть, что

$$\|K\varphi_n-K_n\varphi_n\|\le$$
$$\le\left\|a\varphi_n^{++}-P_{nn}\left[a\varphi^{++}\right]\right\|+\cdots+\left\|d\varphi_n^{--}-P_{nn}\left[d\varphi_n^{--}\right]\right\|. \tag{1.7}$$

Так как все слагаемые оцениваются одинаково, то остановимся на оценке первого. Заменяя $a(t_1,t_2)$ отношением $\psi^{++}(t_1,t_2)/\psi^{--}(t_1,t_2)$, можно записать, что

$$J=\left\|a\varphi_n^{++}-P_{nn}\left[a\varphi_n^{++}\right]\right\|=\left\|\psi^{++}(\psi^{--})^{-1}\varphi_n^{++}-P_{nn}\left[\psi^{++}(\psi^{--})^{-1}\varphi_n^{++}\right]\right\|.$$

Обозначим через ψ_n^{--} полином наилучшего равномерного приближения для функции $(\psi^{--})^{-1}$, аналитической в области D^{--}.

Тогда

$$J = \left\| (\psi^{--})^{-1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l - \psi_n^{--} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l + \right.$$

$$\left. + P_{nn} \left[\psi_n^{--} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l - (\psi^{--})^{-1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l \right] \right\|.$$

Известно, что $\|P_{nn}\| \leq A \ln^2 n$, $\|(\psi^{--})^{-1} - \psi_n^{--}\| \leq A n^{-(\alpha-\beta)}$. Тогда

$$J = A n^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l \right\| \leq A n^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n \|\varphi_n^{++}\|.$$

Проведя аналогичные выкладки для остальных слагаемых, стоящих в правой части неравенства (1.7), убеждаемся в справедливости оценки $\|K\varphi_n - K_n\varphi_n\| \leq A n^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n \|\varphi_n\|$. Из этой оценки и теоремы Банаха следует обратимость слева оператора K_n. Так как оператор K_n – конечномерный, то обратимость слева влечет за собой двустороннюю обратимость. Теорема доказана.

Пусть функции a, b, c, d представимы в виде произведений $a(t_1, t_2) = = a_1(t_1) a_2(t_2), \ldots, d(t_1, t_2) = d_1(t_1) d_2(t_2)$. Тогда оценки, приведенные в предыдущей теореме, допускают усиление, если дополнительно предположить, что функции a, b, c, d имеют производные.

Предположим, что $a_i, b_i, c_i, d_i \in W^r H_\alpha$, $r \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $i = = 1, 2$. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1.2 [25], [28]. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве E, функции a, b, c, d не обращаются в нуль на контуре γ_{12} и представимы в виде $a(t_1, t_2) = a_1(t_1) a_2(t_2), \ldots, d(t_1, t_2) = = d_1(t_1) d_2(t_2)$, a_i, b_i, c_i, $d_i \in W^r H_\alpha$, $r \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, $i = 1, 2$. Тогда при n таких, что $q = A n^{-r-\alpha+\beta} \ln^2 n < 1$, система уравнений (1.6) имеет единственное решение φ_n^* и справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq \leq A n^{-r-\alpha+\beta} \ln^2 n$, где φ^* – решение уравнения (1.1).

Аналогичным образом доказывается теорема 1.3.

Теорема 1.3 [25], [28]. Пусть выполнены условия теоремы 1.2, причем a_i, b_i, c_i, d_i – функции, аналитические в кольце $\rho_i < |z_i| < R_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда при n таких, что $q = A \left[\rho^{n+1} + R^{n-1}\right] \ln^2 n < 1$ $(\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, $R = \min(R_1, R_2))$, система уравнений (1.6) имеет единственное решение φ_n^* и справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq Aq$, где φ^* – решение уравнения (1.1).

Проведем теперь обоснование вычислительной схемы (1.6) в пространстве $L_2(\gamma_{12})$ функций, суммируемых с квадратом. В этом случае будем предполагать, что коэффициенты и правая часть уравнения (1.1) являются непрерывными функциями.

Теорема 1.4 [25], [28]. Пусть оператор K непрерывно обратим в пространстве $L_2(\gamma_{12})$, функции $a, b, c, d, f \in C_{2\pi}$ не обращаются в нуль на γ_{12} и, кроме того, имеют место факторизации $(1.2) - (1.5)$. Тогда при n таких, что $q = A \max\left(\omega(a, n^{-1}), \ldots, \omega(d, n^{-1})\right) < 1$, система уравнений (1.6) имеет единственное решение φ_n^* и справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq A \max\left[\omega(a, n^{-1}), \ldots, \omega(d, n^{-1})\right]$, где φ^*- решение уравнения (1.1).

Доказательство. Методика доказательства точно такая же, как при доказательстве теоремы 1.1. Различие состоит лишь в оценках. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что если $f(t_1, t_2)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше n по каждой переменной, то $\|P_{nn}\left(f(t_1, t_2)\right)\| = \|f(t_1, t_2)\|$. Кроме того, если
ψ_n- полином наилучшего равномерного приближения функции ψ, то

$$|\psi(t_1, t_2) - \psi_n(t_1, t_2)| \leq A \max\left[\omega_{t_1}\left(\psi(t_1, t_2); n^{-1}\right), \omega_{t_2}\left(\psi(t_1, t_2); n^{-1}\right)\right].$$

Воспользовавшись этими оценками и повторяя рассуждения, сделанные при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся в справедливости следующих теорем.

Теорема 1.5 [25], [28]. Пусть оператор K непрерывно обратим в $L_2(\gamma_{12})$, функции a, b, c, d не обращаются в нуль на γ_{12}, справедливо представление $a(t_1, t_2) = a_1(t_1)a_2(t_2), \ldots, d(t_1, t_2) = d_1(t_1)d_2(t_2)$, причем a_i, b_i, c_i, $d_i \in W^r H_\alpha$ $(r \geq 1,\ 0 < \alpha < 1)$, $i = 1, 2$. Тогда при n таких, что $q = An^{-r-\alpha} < 1$, система уравнений (1.6) имеет единственное решение φ_n^* и справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq An^{-r-\alpha}$, где φ^* – решение уравнения (1.1).

Теорема 1.6 [25], [28]. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы , и, кроме того, пусть функции a_i, b_i, c_i, d_i- аналитические в кольце $\rho_i < |z_i| < R_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда при n таких, что
$q = A\left[\rho^{n+1} + R^{-n-1}\right] < 1$, система (1.6) имеет единственное решение φ_n^*, причем $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq A\left[\rho^{n+1} + R^{-n-1}\right]$, где φ^*- решение уравнения (1.1), $\rho = \max(\rho_1, \rho_2)$, $R = \min(R_1, R_2)$.

2. Приближенное решение полисингулярных интегральных уравнений

В этом параграфе для простоты обозначений будем рассматривать бисингулярные интегральные уравнения. Полученные результаты легко распространяются на полисингулярные интегральные уравнения любой конечной размерности.

2.1. Приближенное решение бисингулярных интегральных уравнений нормального типа

Рассмотрим на контуре $\gamma_{12} = \gamma_1 \times \gamma_2$ бисингулярное интегральное уравнение

$$Kx = a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)S_{12}(x(\tau_1,\tau_2)) +$$
$$+U_{12}\left[h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)\right] = f(t_1,t_2). \qquad (2.1)$$

Воспользовавшись формулами Сохоцкого для бисингулярных интегралов, приведенных в § 7 введения, представим уравнение (2.1) в виде:

$$(a+b)\varphi^{++} - (a-b)\varphi^{+-} - (a-b)\varphi^{-+} + (a+b)\varphi^{--} +$$
$$+U_{12}\left[h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)(\varphi^{++} - \varphi^{+-} + \varphi^{+-} + \varphi^{--})\right] = f(t_1,t_2).$$

Будем считать, что функции $(a+b)$, $(a-b)$ не обращаются в нуль на γ_{12}, принадлежат классу Гельдера $H_{\alpha\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ и имеют частные индексы, равные нулю.

Разделим на $(a+b)$ обе части предыдущего уравнения. В результате получим уравнение

$$\varphi^{++} - (a-b)(a+b)^{-1}\varphi^{+-} - (a-b)(a+b)^{-1}\varphi^{-+} + \varphi^{--} + (a+b)^{-1}\times$$
$$\times U_{12}\left[h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)(\varphi^{++}(\tau_1,\tau_2) + \ldots + \varphi^{--}(\tau_1,\tau_2))\right] =$$
$$= f(t_1,t_2)(a+b)^{-1}. \qquad (2.2)$$

В монографии [88] доказана возможность представления

$$(a-b)(a+b)^{-1} = (\psi^{+-}\psi^{-+})^{-1}\psi^{++}\psi^{--},$$

где $\psi^{\pm\pm} = \exp\left\{\left[\ln\left((a-b)(a+b)^{-1}\right)\right]^{\pm\pm}\right\}$.

Заменим в уравнении (2.2) функцию $(a-b)(a+b)^{-1}$ выражением $(\psi^{++}\psi^{--})/\psi^{+-}\psi^{-+}$. В результате получим

$$L\varphi = (\psi^{++}\psi^{--})^{-1}\varphi^{++} - (\psi^{+-}\psi^{-+})^{-1}\varphi^{-+} - (\psi^{+-}\psi^{-+})^{-1}\varphi^{+-} +$$
$$+(\psi^{++}\psi^{--})^{-1}\varphi^{--} + (\psi^{++}\psi^{--}(a-b))^{-1}U_{12}\left[h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)(\varphi^{++}(\tau_1,\tau_2) + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \varphi^{--}(\tau_1,\tau_2))d\tau_1, d\tau_2\right] = \psi^{++}\psi^{--}(a+b)^{-1}f(t_1,t_2). \qquad (2.3)$$

Приближенное решение уравнения (2.3) будем искать в виде функций

$$\varphi_n^{++} = \psi^{++} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l, \quad \varphi_n^{+-} = \psi^{+-} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-n}^{-1} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l,$$
$$\varphi_n^{-+} = \psi^{-+} \sum_{k=-n}^{-1} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l, \quad \varphi_n^{--} = \psi^{--} \sum_{k=-n}^{-1} \sum_{l=-n}^{-1} \alpha_{kl} t_1^k t_2^l. \tag{2.4}$$

Коэффициенты $\{\alpha_{kl}\}$ определим из системы линейных алгебраических уравнений

$$L_n \varphi_n \equiv P_{nn} [L\varphi_n] = P_{nn}[f]. \tag{2.5}$$

Обоснование вычислительной схемы (2.5) проводится в пространстве E, введенном в предыдущем параграфе.

Теорема 2.1 [25], [28]. Пусть выполнены условия: 1) уравнение (2.1) однозначно разрешимо при любой правой части; 2) функции a, b, c, d, f удовлетворяют условию Гельдера H_α по каждой переменной; 3) коэффициенты a, b, c, d не обращаются в нуль на γ_{12} и имеют равные нулю частные индексы. Тогда система уравнений (2.5) однозначно разрешима при n таких, что $q = An^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n < 1$, и справедлива в метрике пространства E оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq An^{-(\alpha-\beta)} \ln^2 n$, где φ^* и φ_n^* – решения уравнений (2.3) и (2.5), соответственно.

Теорема 2.2 [25], [28]. Пусть выполнены условия 1), 3) предыдущей теоремы, а функции a, b, h, f непрерывны. Тогда система уравнений (2.5) однозначно разрешима при n таких, что $q =$ $= A \max \left(\omega(a, n^{-1}), \ldots, \omega(d, n^{-1})\right) < 1$, и в метрике $L_2(\gamma_{12})$ справедлива оценка $\|\varphi^* - \varphi_n^*\| \leq A \max \left(\omega(a, n^{-1}), \ldots, \omega(d, n^{-1}), \omega(f; n^{-1})\right)$, где φ^* и φ_n^* - решения уравнений (2.3) и (2.5), соответственно.

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 аналогичны доказательству теоремы 1.4.

Замечание. Если функции a, b, h, f имеют большую гладкость, то справедливы оценки, аналогичные приведенным в теоремах 1.1, 1.4, 1.5, 1.6.

2.2. Приближенное решение бисингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях

В этом разделе изложены результаты работы [50].

Рассмотрим бисингулярное интегральное уравнение вида

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \frac{b(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + \frac{c(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{x(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 +$$

$$
+\frac{d(t_1,t_2)}{\pi^2}\int\limits_{\gamma_1}\int\limits_{\gamma_2}\frac{x(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2), \qquad (2.6)
$$

$t_1 \in \gamma_1$, $t_2 \in \gamma_2$.

Предположим, что $a(t_1,t_2)$, $b(t_1,t_2)$, $c(t_1,t_2)$, $d(t_1,t_2) \in H_{\alpha,\alpha}$, γ_1, γ_2- единичные окружности на комплексных плоскостях z_1 и z_2.

Пользуясь преобразованием Гильберта, сведем уравнение (2.6) к уравнению с ядром Гильберта, которое для простоты обозначений запишем как

$$
a(s_1,s_2)x(s_1,s_2) + b(s_1,s_2)\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma_1,s_2)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_1-s_1}{2}d\sigma_1 +
$$

$$
+c(s_1,s_2)\int\limits_0^{2\pi} x(s_1,\sigma_2)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_2 +
$$

$$
+d(s_1,s_2)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma_1,\sigma_2)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_1-s_1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_2-s_2}{2}d\sigma_1 d\sigma_2 = f(s_1,s_2). \qquad (2.7)
$$

Отметим, что все проведенные ниже рассуждения справедливы и для более общих уравнений, включающих в левую часть и компактный интегральный оператор. Функции $b(s_1,s_2)$, $c(s_1,s_2)$, $d(s_1,s_2)$ предполагаются такими, что выполнены приводимые ниже условия (2.16).

Выберем систему узлов $v_k^1 = v_k^2 = v_k = \pi k/n$, $k = 0,\dots,2n$, $v_k^{1*} = v_k^{2*} = v_k^* = \pi k/n + h$, $0 < h < \pi/2n$, $k = 0,\dots,2n-1$. Величина параметра h будет определена ниже.

Решение будем искать в виде полинома

$$
x_{nn}(s_1,s_2) = \sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{l=0}^{2n-1} a_{kl}\psi_k(s_1)\psi_l(s_2),
$$

где $\psi_k(s)$ – фундаментальные полиномы по узлам v_k^*, $k = 0,1,\dots,$ $2n-1$,

$$
\psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = v_l^*, \quad l \neq k; \\ 1, & s = v_k^*. \end{cases}
$$

Заменим в уравнении (2.7) сингулярные интегралы кубатурными формулами. Пусть $s_1 \in [v_i, v_{i+1})$, $s_2 \in [v_j, v_{j+1})$. Тогда

$$
\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma_1,s_2)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma_1-v_i^*}{2}d\sigma_1 =
$$

$$= \sum_{k=0, k\neq i-1, i+1}^{2n-1} x(v_k^*, v_j^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_1 + r_1, \tag{2.8}$$

$$\int_0^{2\pi} x(s_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 =$$

$$= \sum_{k=0, k\neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_k^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 + r_2; \tag{2.9}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 =$$

$$= \sum_{k=0, k\neq i-1, i+1}^{2n-1} \sum_{l=0, l\neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_l^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}}\int_{v_l}^{v_{l+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 + $$
$$+ r_3. \tag{2.10}$$

Для оценки погрешности квадратурных формул (2.8) и (2.9) введем прямые

$$y_1(\sigma_1) = x(v_i^*, v_j^*) + k_1(\sigma_1 - v_i^*),$$
$$y_2(\sigma_2) = x(v_i^*, v_j^*) + k_2(\sigma_2 - v_j^*),$$

где коэффициенты k_1 и k_2 подбираются описанным в § 5 гл. III способом. Погрешность квадратурных формул (2.8) и (2.9) также была оценена в § 1.

Остановимся на оценке погрешности квадратурной формулы (2.10). Эта погрешность удовлетворяет неравенству

$$|r_3| \leq \sum_{k=0, k\neq i-1, i+1}^{2n-1} \sum_{l=0, l\neq j-1, j+1}^{2n-1} \left| \int_{v_k}^{v_{k+1}}\int_{v_l}^{v_{l+1}} (x(\sigma_1, \sigma_2) - x(v_k^*, v_l^*)) \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| +$$
$$+ \sum_{k=i-1, i+1} \sum_{l=0}^{2n-1} \left| \int_{v_k}^{v_{k+1}}\int_{v_l}^{v_{l+1}} (x(\sigma_1, \sigma_2) - \psi_{il}(\sigma_1, \sigma_2)) \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \right| +$$
$$+ \sum_{l=j-1, j+1} \left(\sum_{k=0}^{i-2} + \sum_{k=i+2}^{2n-1} \right) \left| \int_{v_k}^{v_{k+1}}\int_{v_l}^{v_{l+1}} (x(\sigma_1, \sigma_2) - \psi_{kj}^*(\sigma_1, \sigma_2)) \times \right.$$

$$\times \operatorname{ctg} \frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \Bigg| = r_{31} + r_{32} + r_{33}.$$

Здесь $\psi_{il}(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\psi_{kj}^*(\sigma_1, \sigma_2)$– поверхности такие, что

$$\int\limits_{v_{i-1}}^{v_i} \int\limits_{v_l}^{v_{l+1}} \psi_{il}(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \int\limits_{v_{i+1}}^{v_{i+2}} \int\limits_{v_l}^{v_{l+1}} \psi_{il}(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 = 0, \qquad (2.11)$$

$$\int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \int\limits_{v_{j-1}}^{v_j} \psi_{kj}^*(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} \int\limits_{v_{j+1}}^{v_{j+2}} \psi_{kj}^*(\sigma_1, \sigma_2) \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 = 0, \qquad (2.12)$$

и, кроме того,

$$\psi_{il}(v_i^*, v_l^*) = x(v_i^*, v_l^*), \quad l = 0, 1, \dots, 2n-1, \qquad (2.13)$$

$$\psi_{kj}^*(v_k^*, v_j^*) = x(v_k^*, v_j^*), \quad k = 0, 1, \dots, i-1, i+2, \dots, 2n-1. \quad (2.14)$$

Нетрудно видеть, что такие поверхности существуют. В качестве простейшего примера подобной поверхности, удовлетворяющей условиям (2.11) и (2.13), возьмем $y(\sigma_1, \sigma_2) = x(v_i^*, v_l^*) + k_{il}(\sigma_1 - v_i^*)$, где k_{il} определяется формулой (2.11).

Аналогичное построение справедливо и для условий (2.12), (2.14).

Для получения оценок $r_{31} \div r_{33}$ понадобятся следующие неравенства [66, с. 90]:

$$|x(\sigma_1, \sigma_2) - x(v_i^*, v_l^*)| \le A(|\sigma_1 - v_i^*|^\alpha + |\sigma_2 - v_l^*|^\alpha) \le A(|\sigma_1 - v_i^*||\sigma_2 - v_l^*|)^{\alpha/2},$$

$$|\psi_{il}(\sigma_1, \sigma_2) - \psi_{il}(v_i^*, v_l^*)| \le k_{il}|\sigma_1 - v_i^*|.$$

Воспользовавшись этими замечаниями, нетрудно показать, что

$$r_{31} \le A\frac{\ln^2 n}{n^\alpha}, \quad r_{32} \le A\frac{\ln n}{n^\alpha} + Ak\frac{\ln n}{n}, \quad r_{33} \le A\frac{\ln n}{n^\alpha} + Ak\frac{\ln n}{n},$$

где $k = \max_{il} |k_{il}|$.

Следовательно,

$$r_{33} \le A\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} + Ak\frac{\ln n}{n}.$$

Заменим теперь в уравнении (2.7) сингулярные и бисингулярные интегралы квадратурными формулами (2.8) – (2.10) и к полученному выражению применим метод коллокации. В результате имеем

$$a(v_i^*, v_j^*)x(v_i^*, v_j^*) + b(v_i^*, v_j^*) \sum_{k=0, k\neq i-1, i+1}^{2n-1} x(v_k^*, v_j^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_2 +$$

$$+c(v_i^*, v_j^*) \sum_{k=0, k\neq i-1, i+1}^{2n-1} x(v_i^*, v_k^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 +$$

$$+d(v_i^*, v_j^*) \sum_{k=0, k\neq i-1, i+1}^{2n-1} \sum_{l=0, l\neq j-1, j+1}^{2n-1} x(v_k^*, v_l^*) \int_{v_k}^{v_{k+1}} \int_{v_l}^{v_{l+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma =$$

$$= f(v_i^*, v_j^*), \quad i, j = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{2.15}$$

где $d\sigma = d\sigma_1 d\sigma_2$.

В случае если

$$b(v_i^*, v_j^*) \int_{v_i}^{v_{i+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} d\sigma_1 + c(v_i^*, v_j^*) \int_{v_j}^{v_{j+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_2 +$$

$$+d(v_i^*, v_j^*) \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - v_i^*}{2} \operatorname{ctg}\frac{\sigma_2 - v_j^*}{2} d\sigma_1 d\sigma_2 \neq 0 \tag{2.16}$$

при $i, j = 0, 1, \ldots, 2n-1$, то выбором параметра h можно добиться того, что система уравнений (2.15) будет однозначно разрешима.

Оценка погрешности приближенного решения уравнения (2.7) по вычислительной схеме (2.15) оценивается неравенством $A\frac{\ln^2 n}{n^\alpha} + Ak\frac{\ln n}{n}$. Справедливость этого неравенства доказывается по аналогии с доказательством, приведенным в § 5 гл. III. Отметим, что если в качестве функций ψ_{kl} и ψ_{kl}^* взять более сложные поверхности, то второе слагаемое в приведенной выше оценке погрешности можно уменьшить.

Замечание. Приведенные выше рассуждения можно распространить и на бисингулярные интегральные уравнения вида

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 + c(t_1, t_2) \int_{-1}^{1} \frac{x(t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2 +$$

$$+d(t_1, t_2) \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} + \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= f(t_1, t_2).$$

При этом в качестве узлов коллокации следует взять узлы, введенные в § 5 гл. III при исследовании приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования.

3. Приближенные методы решения многомерных сингулярных интегральных уравнений

Многомерные сингулярные интегральные уравнения вида

$$a(t)x(t) + \int\limits_E \frac{\varphi(t,\Theta)x(\tau)}{(r(t,\tau))^l} d\tau = f(t), \tag{3.1}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_l)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$, $r(t,\tau) = \left[\sum\limits_{k=1}^{l} (t_k - \tau_k)^2\right]^{1/2}$, $\Theta = \dfrac{(t-\tau)}{r(t,\tau)}$, E – некоторое мнообразие в R^l, находят широкое применение в многочисленных задачах математики, механики, аэродинамики и других областях физики и техники [85], [106], [121].

Несмотря на это, приближенные методы решения уравнений вида (3.1) к настоящему времени практически не разработаны.

В данном параграфе описан метод приближенного решения уравнений вида (3.1) и более общих нелинейных сингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t, x(t)) + \int\limits_E \frac{\varphi(t,\Theta,x(\tau))}{(r(t,\tau))^l} d\tau = f(t), \tag{3.2}$$

на произвольных многообразиях $E \subset R^l$.

Результаты, включенные в этот параграф, опубликованы в работах [47] – [49].

3.1. Приближенное решение линейных многомерных сингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)x(t) + b(t)\int\limits_G \frac{\varphi(\Theta)x(\tau)}{(r(t,\tau))^2} d\tau = f(t), \tag{3.3}$$

где G – односвязное многообразие на плоскости E_2. Будем считать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ и $\varphi(\Theta)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha \leq 1)$ по всем переменным.

Ниже будет показано, что результаты, полученные для уравнений вида (3.3), распространяются на уравнения вида

$$a(t)x(t)+\int\limits_{G}\frac{\varphi(t,\Theta)x(\tau)}{(r(t,\tau))^2}d\tau=f(t). \tag{3.4}$$

Мы ограничиваемся двумерными сингулярными интегральными уравнениями только для простоты обозначений. Из проделанных выкладок будет видно, что полученные результаты практически дословно распространяются на многомерные сингулярные интегральные уравнения любой конечной размерности.

Построим вычислительную схему приближенного решения уравнения (3.3) в предположении, что $G-$ квадрат $[-A,A]^2$, где $A-$ некоторое вещественное число. Ниже будут описаны изменения, которые необходимо ввести в вычислительную схему в случае, когда $G-$ произвольное односвязное многообразие. Покроем область G квадратами $\Delta_{kl}=[t_k,t_{k+1};t_l,t_{l+1}]$, $k,l=\overline{0,N+1}$, где $t_k=-A+2Ak/(N+2)$, $k=\overline{0,N+2}$.

Наряду с квадратами Δ_{kl}, $k,l=\overline{0,N+1}$, введем прямоугольники $\bar{\Delta}_{kl}$, $k,l=\overline{1,N}$, которые определяются следующим образом:
$\bar{\Delta}_{kl}=\Delta_{kl}$ при $k=\overline{2,N-1}$ и $l=\overline{2,N-1}$;
$\bar{\Delta}_{11}=\Delta_{00}\cup\Delta_{01}\cup\Delta_{10}\cup\Delta_{11}$;
$\bar{\Delta}_{1,N}=\Delta_{0,N}\cup\Delta_{1,N}\cup\Delta_{0,N+1}\cup\Delta_{1,N+1}$;
$\bar{\Delta}_{N,1}=\Delta_{N,0}\cup\Delta_{N+1,0}\cup\Delta_{N,1}\cup\Delta_{N+1,1}$;
$\bar{\Delta}_{N,N}=\Delta_{N,N}\cup\Delta_{N,N+1}\cup\Delta_{N+1,N}\cup\Delta_{N+1,N+1}$;
$\bar{\Delta}_{1,l}=\Delta_{0,l}\cup\Delta_{1,l}$ при $l=\overline{2,N-1}$;
$\bar{\Delta}_{N,l}=\Delta_{N,l}\cup\Delta_{N+1,l}$ при $l=\overline{2,N-1}$;
$\bar{\Delta}_{k,1}=\Delta_{k,0}\cup\Delta_{k,1}$ при $k=\overline{2,N-1}$;
$\bar{\Delta}_{k,N}=\Delta_{k,N}\cup\Delta_{kN+1}$ при $k=\overline{2,N-1}$.

Приближенное решение уравнения (3.3) будем искать в виде кусоч-
но-постоянной функции $x_N(t_1,t_2)$, равной константе x_{kl} в квадрате $\bar{\Delta}_{kl}$, $k,l=\overline{1,N}$.

Неизвестные значения x_{kl} определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(\bar{t}_{kl})x_{kl}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}{}'\bar{d}_{ij}(\bar{t}_{kl})x_{ij}+x_{kl}d_{kl}(\bar{t}_{kl})=f(\bar{t}_{kl}),\quad k,l=1,2,\ldots,N, \tag{3.5}$$

где $\sum\sum'$ означает суммирование по прямоугольникам Δ_{ij}, не имеющим общих граней с квадратом Δ_{kl}, $t_{kl}=(t_k,t_l)$, $\tau_{kl}=(\tau_k,\tau_l)$,

$$h^2 = \left(\frac{2A}{N}\right)^2,\ d_{ij}(\bar{t}_{kl}) = \int\limits_{\Delta_{ij}} \varphi\left(\frac{\bar{t}_{kl} - \tau}{r(\bar{t}_{kl}, \tau)}\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl}, \tau)},$$

$$\bar{d}_{ij}(\bar{t}_{kl}) = \int\limits_{\bar{\Delta}_{ij}} \varphi\left(\frac{\bar{t}_{kl} - \tau}{r(\bar{t}_{kl}, \tau)}\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl}, \tau)},\ \bar{t}_{kl} = (t_k + \bar{h}_1, t_l + \bar{h}_2),$$

величины $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ будут описаны ниже.

Покажем, что для широких классов ядер $\varphi(\Theta)$ параметры $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ могут быть выбраны таким образом, чтобы система уравнений (3.5) была однозначно разрешима. В качестве критерия однозначной разрешимости системы уравнений (3.5) будем использовать теорему Адамара.

Вначале оценим сверху выражение

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N}{}' \bar{d}_{ij}(\bar{t}_{kl}) \leq Bh^2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N}{}' \frac{1}{(t_k - t_j)^2 + (t_l - t_j)^2} \leq$$

$$\leq 8Bh^2 \sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]+1} \sum_{j=1}^{[\frac{N}{2}]+1} \frac{1}{t_i^2 + t_j^2} \leq$$

$$\leq 8Bh^2 \sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]+1} \sum_{j=1}^{[\frac{N}{2}]+1} \frac{N^2}{(i^2 + j^2)4A^2} =$$

$$= 8B \sum_{i=1}^{[\frac{N}{2}]+1} \sum_{j=1}^{[\frac{N}{2}]+1} \frac{1}{i^2 + j^2} \leq DlnN. \qquad (3.6)$$

Отметим, что здесь и далее для единообразия через B и D обозначаются различные константы $(B_1, B_2, \ldots D_1, D_2, \ldots)$, возникающие при оценках. Все эти константы не зависят от N и легко могут быть получены. Так как их численные значения нигде не используются, то оценки этих констант опускаются.

Таким образом, если обозначить через C матрицу системы уравнений (3.5), то из неравенства (3.6) следует, что

$$\sum_{k=0, k\neq j}^{N^2} |c_{jk}| \leq D \ln N, \qquad (3.7)$$

причем эта оценка не зависит от j, $1 \leq j \leq N^2$.

Покажем теперь, что можно так подобрать параметры $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$, что величина $|d_{ll}(\bar{t}_{ll})|$ может быть сделана сколь угодно большой.

Известно [121] необходимое и достаточное условие существования сингулярного интеграла, согласно которому $\int_S \varphi\left(\frac{\bar{t}_{kl} - \tau}{r(\bar{t}_{kl}, \tau)}\right) ds =$

0,
где S - единичная окружность с центром в точке $\bar{t}_{kl}$, которую пробегает точка Θ. Так как криволинейный интеграл первого рода обращается в нуль, а функция $\varphi(\Theta)$ по предположению непрерывна, то имеются по крайней мере две точки, в которых функция $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль. Предположим для определенности, что функция $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль в точках a_1 и a_2. Это означает, что имеются два отрезка прямых линий, соединяющих точку $\bar{t}_{kl}$ с точками a_1 и a_2, на которых функция $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль. Так как характеристика $\varphi(\Theta)$ не зависит от полюса, то углы Θ_1 и Θ_2 между этими прямыми и осью $O\tau_1$ не зависят от месторасположения точки $\bar{t}_{kl}$. Положим для определенности $0 \leq \Theta_1 < \Theta_2 \leq \pi$. Введем параметр $\bar{h}$, где $\bar{h}$ – достаточно малое положительное число, величина которого будет описана ниже. В качестве точки $\bar{t}_{kl}$ возьмем точку с координатами $\bar{t}_{kl} = (\bar{t}_k, \bar{t}_l)$, $\bar{t}_k = t_k + \bar{h}$, $\bar{t}_l = t_{l+1} - \bar{h}$, $\bar{h} \leq \frac{A}{N}$. Тогда интеграл $d_{kl}(\bar{t}_{kl})$ можно представить следующим образом:

$$d_{kl}(\bar{t}_{kl}) \geq \left|\int\limits_{G_1} \varphi\left(\frac{\bar{t}_{kl}-\tau}{r(\bar{t}_{kl},\tau)}\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl},\tau)}\right| \left|\int\limits_{\sigma_0} \varphi\left(\frac{\bar{t}_{kl}-\tau}{r(\bar{t}_{kl},\tau)}\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl},\tau)}\right| = q_1 + q_2,$$

где σ_0 - круг радиуса $\bar{h}$ с центром в точке $\bar{t}_{kl}$, $G_1 = \Delta_{kl} \backslash \sigma_0$.

Из теоремы 1.5 монографии [121] следует, что $q_2 = 0$. Для упрощения описания выкладок, проводимых при оценке интеграла q_1, обратимся к рисунку. При сделанном выше предположении о том, что характеристика обращается в нуль в двух точках, возможны два случая.

Вначале рассмотрим случай, представленный на рисунке 1.

Пусть $a_0 = \bar{t}_{kl}$. Предположим для определенности, что функция $\varphi(\Theta)$ отрицательна внутри треугольника $a_0a_1a_2$ и положительна в дополнении этого треугольника до квадрата Δ_{kl}. Из необходимого и достаточного условия существования сингулярного интеграла следует, что интеграл по области, ограниченной круговым сегментом σ_1 с хордой a_2a_3 и дугой a_2a_3, будет положительным. Обозначим $\Delta^*_{kl} = \tilde{\Delta}_{kl} \backslash \sigma_1$, где $\tilde{\Delta}_{kl}$ – прямоугольник $a_4a_8a_{10}a_{11}$. Пусть S – область $a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_4$.

Оценим снизу величину интеграла

$$\int\limits_{\Delta^*_{kl}} \frac{\varphi(\Theta)}{r^2(\tau, \bar{t}_{kl})} d\tau \geq \int\limits_{S} \frac{\varphi(\Theta) d\tau}{r^2(\tau, \bar{t}_{kl})} \geq \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\varphi(\Theta) d\rho d\varphi}{\rho} = \ln \frac{R}{r} \int\limits_{\pi}^{2\pi} \varphi(\Theta) d\varphi. \tag{3.8}$$

Здесь r – расстояние между точками a_0 и a_1, $R = \frac{A}{N}$.

Отметим, что при выводе предыдущего неравенства был сделан переход к полуокружности, отмеченной на рисунке 1 пунктирной линией. Нетрудно видеть, что $r = \dfrac{b_0 - a_0}{\sin(\pi - \Theta_2)} = \dfrac{b_0 - a_0}{\sin \Theta_2}$, и так как угол Θ_2 не равен π, то за счет выбора $\bar{h} = b_0 - a_0$ величина r может быть сделана сколь угодно малой. Отметим, что в ситуации, представленной на рисунке 1 $\bar{t}_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $\bar{t}_l = t_{l+1} - \bar{h}$, если $k \neq 0, N+1$ и $l \neq 0, N+1$. Таким образом, за счет выбора $\bar{h}$ правую часть неравенства (3.8) можно сделать как угодно большой. Из полученных оценок нетрудно заметить, что

$$d_{kl}(\bar{t}_{kl}) \geq D \ln \left| \frac{A \sin \Theta_2}{Nh} \right|, \tag{3.9}$$

где D – некоторая вполне определенная положительная константа. За счет выбора $\bar{h}$ всегда можно добиться того, чтобы величина $d_{kl}(\bar{t}_{kl})$ была как угодно большой и чтобы выполнялись условия теоремы Адамара. Таким образом, в случае, когда $\Theta_2 - \Theta_1 < \pi$, доказана однозначная разрешимость системы (3.5).

Рассмотрим теперь случай, когда $\Theta_2 - \Theta_1 = \pi$. Этот случай в наиболее сложном для исследования варианте, когда $\Theta_1 = 0$, представлен на рисунке 2.

Обозначим через σ_0 круг радиуса $\bar{h}$ с центром в точке $a_0 = \bar{t}_{kl}$, а через σ_1 – дополнение σ_0 до прямоугольника $c_1c_2a_2a_1$. Из условия существования сингулярного интеграла следует, что интеграл по области σ_0 равен нулю. Оценим интеграл по области σ_1. При этом напомним, что функция $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль на прямой a_1a_2. Будем для определенности считать, что внутри прямоугольника

$c_1c_2a_2a_1$ функция $\varphi(\Theta)$ отрицательна, а внутри прямоугольника $a_1a_2d_1d_2$ - положительна.

Очевидно, что

$$\int\limits_{\sigma_1} \frac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)} \leq \int\limits_{\sigma_1} \frac{|\varphi(\Theta)-\varphi\left(\frac{\tau_1-\bar{t}_k}{r(\tau,a_0)},0\right)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)} \leq \int\limits_{\sigma_1} B\left(\frac{\tau_2-\bar{t}_l}{r(\tau,a_0)}\right)^\alpha \frac{d\tau}{r^2(\tau,a_0)}.$$

Перепишем последний интеграл в более удобном виде, перенеся начало локальной системы координат в точку a_0. Тогда

$$B\int\limits_{\sigma_1}\left(\frac{|\tau_2|}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}}\right)^\alpha \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^2+\tau_2^2} \leq 2B\int\limits_0^{\bar{h}}\int\limits_{\sqrt{\bar{h}^2-\tau_1^2}}^{\bar{h}} \frac{\tau_2^\alpha}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{1+\alpha/2}}d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+2B\int\limits_0^{\bar{h}}\int\limits_{\bar{h}}^{\frac{A}{N}} \frac{\tau_2^\alpha}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{1+\alpha/2}}d\tau_1 d\tau_2 = 2B(q_1+q_2).$$

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$q_1 = \int\limits_0^{\bar{h}}\int\limits_{\sqrt{\bar{h}^2-\tau_1^2}}^{\bar{h}} \frac{\tau_2^\alpha d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^{1+\alpha/2}} = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{\bar{h}}^{\frac{\bar{h}}{\sin\varphi}} \frac{\sin^\alpha\varphi}{\rho}d\rho + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\bar{h}}^{\frac{\bar{h}}{\cos\varphi}} \frac{\sin^\alpha\varphi}{\rho}d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \sin^\alpha\varphi \ln\frac{1}{\sin\varphi}d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^\alpha\varphi \ln\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi \leq \int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{1}{\sin\varphi}d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi.$$

В силу симметричности подынтегральных функций оба интеграла равны между собой. Оценим, например, первый из них. Поскольку

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\varphi}{\varphi} \leq 1,$$

то

$$\int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{1}{\sin\varphi}d\varphi \leq \int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{1}{\frac{2}{\pi}\varphi}\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{\pi}{2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\pi/4} \ln\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{2} - \varphi(\ln\varphi - 1)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\ln\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

Следовательно, $q_1 \leq \pi/2$. Оценим второе слагаемое. Для этого разобьем прямоугольник $e_1c_2a_2e_3$ на $m = \left[\frac{A}{N\bar{h}}\right]$ квадратов и интеграл по всему прямоугольнику представим как сумму интегралов по каждому квадрату. Для первого квадрата $\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2} \geq \bar{h}$, следовательно, искомый интеграл в данном квадрате ограничен 1. Для второго квадрата $\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2} \geq 2\bar{h}$, следовательно, искомый интеграл в данном квадрате ограничен 1/4, и т.д. Таким образом, $q_2 \leq \sum\limits_{v=1}^{m} \dfrac{1}{2^v}$. Последняя сумма представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым элементом b_0, равным 1, и знаменателем q, равным $\frac{1}{2}$. Тогда

$q_2 \leq \dfrac{b_0(q^m-1)}{q-1} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^m}\right) \leq 2.$

Таким образом, интеграл $\int\limits_{\sigma_1} \dfrac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)}$ ограничен некоторой константой $\tilde{B}$ при любых значениях $\bar{h}$. С другой стороны, по аналогии с выкладками, проведенными при рассмотрении первого случая, интеграл $\int\limits_{\bar{\Delta}_{kl}} \dfrac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)}$,

где $\bar{\Delta}_{kl} = [d_2,d_1;a_1,a_2]$, за счет выбора $\bar{h}$ может быть сделан как угодно большим.

Для того, чтобы это доказать, оценим интеграл $\int\limits_{\breve{\Delta}_{kl}} \dfrac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)}$,

где $\breve{\Delta}_{kl}$ – прямоугольник $b_1b_2d_2d_1$. Обозначим через $\tilde{\Delta}_{kl}$ область $e_2e_3v_1v_2$. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\breve{\Delta}_{kl}} \frac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)} \geq \int\limits_{\tilde{\Delta}_{kl}} \frac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)} \geq \int\limits_{2\bar{h}}^{\frac{A}{N}-3\bar{h}} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\varphi(\Theta)|d\tau}{r^2(\tau,a_0)} \geq \ln\frac{\breve{R}}{2\bar{h}} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\Theta)d\varphi,$$

где $\breve{R} = \dfrac{A}{N} - 3\bar{h}$.

Устремляя $\bar{h}$ к нулю, можно сделать рассматриваемый интеграл сколь угодно большим.

Таким образом, доказана однозначная разрешимость системы уравнений (3.5) в случае, если характеристики $\varphi(\Theta)$ обращаются в нуль на двух лучах, исходящих из полюса. Повторяя проделанные выше выкладки, можно показать, что если характеристики $\varphi(\Theta)$ обращаются в нуль на конечном числе лучей, исходящих из полюса, то можно таким образом подобрать константы $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ (для каждого случая свой набор), чтобы система уравнений (3.5) была однозначно разрешима.

Исследуем точность приближенного решения $x_N^*(t_1,t_2)$ уравнения (3.5).

Пусть $x^*(t_1,t_2)$ – точное решение уравнения (3.3). Приравняв обе части этого уравнения в узлах коллокации $\bar{t}_{kl}$, получаем тождество:

$$a(\bar{t}_{kl})x^*(\bar{t}_{kl}) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{\Delta_{ij}^*} \frac{\varphi\left(\frac{\tau_1-\bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2-\bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)x^*(\tau)}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})}d\tau = f(\bar{t}_{kl}), \qquad (3.10)$$

$k,l := \overline{1,N}$.

Обозначим через K_N оператор, описываемый системой (3.5) в пространстве R_{N^2}, через K – оператор, описываемый исходным уравнением (3.3), а через P_N – оператор, проецирующий пространство $X = H_\beta$ $(0<\beta<\alpha)$ на кусочно-постоянные функции по узлам $\bar{t}_{kl}$, $k,l := \overline{1,N}$. Тогда $x_N^* - P_Nx^* = K_N^{-1}(K_N(x_N^* - P_Nx^*)) = K_N^{-1}(P_Nf-$
$-K_NP_Nx^*) = K_N^{-1}(P_NKx^* - K_NP_Nx^*) = K_N^{-1}(P_NKx^* - P_NKP_Nx^*) +$
$+K_N^{-1}(P_NKP_Nx^* - P_NK_NP_Nx^*)$.

Переходя к норме в пространстве R_{N^2}, имеем:

$$||x_N^* - P_Nx^*|| \le DN^{-\alpha} + D||P_N[KP_Nx^* - K_NP_Nx^*]||. \qquad (3.11)$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства. Так как $||P_N|| \le D$, то достаточно оценить величину
$I_1 = \left|\int\limits_{g_{kl}} \varphi\left(\frac{\tau_1-\bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2-\bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)\frac{1}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})}P_Nx^*d\tau\right|$.

Здесь $g_{kl} = [t_{k-1},t_{k+2};t_{l-1},t_{l+2}]\backslash\Delta_{kl}$.

Выше отмечалось, что функция $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль по крайней мере на двух отрезках прямых, выходящих из точки $(\bar{t}_k,\bar{t}_l)$. Пусть это будут сегменты KK_1 и FF_1 (см. рис. 3).

Введем функцию $\psi(x_1,x_2) \in H_{\alpha\alpha}(M)$ $(0<\alpha\le 1)$, такую, что $\psi(\bar{t}_{kl}) = (P_Nx^*)(\bar{t}_{kl})$ и

$$\int\limits_{g_{kl}} \varphi\left(\frac{\tau_1-\bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2-\bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)\frac{\psi(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})}d\tau_1d\tau_2 = 0.$$

Существование такой функции следует из того, что характеристика $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль на двух лучах, исходящих из точки $\bar{t}_{kl}$. Наметим построение этой функции. Обозначим через OF_2 и OF_3 биссектрисы острого и тупого углов KOF, соответственно. На биссектрисе OF_2 построим функцию $z_1 = u_1(x_1,x_2)$, которая описывает отрезок прямой, проходящей через точку O и образующей с биссектрисой OF_2 угол α_1. Внутри острого угла KOF построим кусочно-линейную поверхность, проходящую через прямые

OK, OF_2 и OF. Аналогичное построение проведем внутри тупого угла KOF, но в этом случае угол наклона прямой $z_2 = u_2(x_1, x_2)$ обозначим через α_2.

Нетрудно видеть, что выбором величин углов α_1 и α_2 всегда можно добиться выполнения равенства (3.11). Полученная в результате этого построения поверхность описывается функцией $\psi(x_1, x_2)$, определенной в области g_{kl}. Нетрудно видеть, что функция $\psi(x_1, x_2)$ принадлежит классу Гельдера $H_\alpha(M)$ с константой M, определяемой коэффициентами α_1 и α_2.

Тогда

$$\left|\int\limits_{g_{kl}} \varphi\left(\frac{\tau_1 - \bar{t}_k}{r(\tau, \bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2 - \bar{t}_l}{r(\tau, \bar{t}_{kl})}\right) \frac{1}{r^2(\tau, \bar{t}_{kl})}(P_N x^* - \psi(\tau_1, \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{g_{kl}} \left|\varphi\left(\frac{\tau_1 - \bar{t}_k}{r(\tau, \bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2 - \bar{t}_l}{r(\tau, \bar{t}_{kl})}\right)\right| \frac{1}{r^2(\tau, \bar{t}_{kl})}(|(P_N x^*)(\tau_1, \tau_2) - (P_N x^*)(\bar{t}_{kl})| +$$

$$+|\psi(\tau_1, \tau_2) - \psi(\bar{t}_{kl})|) d\tau_1 d\tau_2 \leq BM_1 \int\limits_{g_{kl}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r^{2-\alpha/2}(\tau, \bar{t}_{kl})} \leq \frac{BM}{N^{\alpha/2}}. \quad (3.12)$$

Таким образом, из оценок (3.11) – (3.12) следует, что
$||x^* - x_N^*|| \leq ||x^* - P_N x^*|| + ||P_N x^* - x_N^*|| \leq BMN^{-\alpha/2}$.

Здесь использовалась оценка $||x^* - P_N x^*|| \leq AN^{-\alpha}$, которая следует из того, что $x^* \in H_\alpha$. Это включение при условии, что $\varphi(\Theta)$ и $f(x)$ принадлежат классу функций Гельдера H_α $(0 < \alpha \leq 1)$, доказано в [121].

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1 [47] – [49]. Пусть оператор K непрерывно обратим, функции $\varphi(\Theta)$ и $f(x)$ принадлежат классу $H_{\alpha\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$, характеристика $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль на двух отрезках, выходящих из полюса. Тогда существует такое $\bar{h}$ (одно и то же для всех прямоугольников Δ_{kl}, $k, l = \overline{1, N}$, используемых в вычислительной схеме (3.5)), что система уравнений (3.5) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$||x^* - x_N^*|| \leq AMN^{-\alpha/2},$$

где x^* и x_N^* – решения уравнений (3.3) и (3.5), соответственно.

Обобщим теорему 3.1 на случай более общих сингулярных интегральных уравнений.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (3.4), у которого характеристика $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль на конечном числе лучей, выходящих из полюса. Из теоремы о необходимом и достаточном условии существования сингулярного интеграла [121] следует, что $\int\limits_S \varphi(\Theta)dS = 0$, где S – единичная окружность, которую пробегает точка Θ. Поэтому при любом числе лучей, на которых функция $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль, можно таким образом разместить полюс функции $\varphi(\Theta)$ в квадрате Δ_{kl}, чтобы $\int\limits_{\Delta_{kl}} \varphi(\Theta)d\tau \neq 0$. После этого выбором величины $\tilde{h}$ можно добиться того, чтобы элементы главной диагонали матрицы левой части системы (3.5) были преобладающими и были выполнены условия теоремы Адамара.

Рассмотрим теперь способы построения вычислительной схемы уравнения (3.4) в случае, когда характеристика $\varphi(t,\Theta)$ зависит от t. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)x(t) + \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi(t,\Theta)x(\tau)}{(r(t,\tau))^2}d\tau = f(t) \tag{3.13}$$

Как и при исследовании приближенных методов решения уравнения (3.4), ограничимся предположением, что $\Delta = [-A, A]^2$. Покроем область Δ квадратами Δ_{kl}, построение которых было описано выше.

Приближенное решение уравнения (3.13) будем искать в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t_1,t_2)$, равной x_{kl} в прямоугольнике Δ_{kl}. В каждом квадрате Δ_{kl} выберем точку $\bar{t}_{kl}$ такую, что

$$\left|\int\limits_{\Delta_{kl}} \varphi\left(\bar{t}_{kl}; \frac{\tau_1 - \bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2 - \bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)\frac{d\tau}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})}\right| >$$

$$> \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}{}' \left|\int\limits_{\Delta_{ij}} \varphi\left(\bar{t}_{kl}; \frac{\tau_1 - \bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2 - \bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)\frac{d\tau}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})}\right|.$$

Здесь $\sum\sum'$ означает суммирование по $(i,j) \neq (k,l)$.

Если такие точки $\bar{t}_{kl}$ существуют для каждого k,l, $k,l = \overline{0,N}$, то возьмем их в качестве узлов коллокации. В результате получаем вычислительную схему

$$a(\bar{t}_{kl})x_{kl} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}{}' x_{ij} \int\limits_{\Delta_{ij}} \varphi\left(\bar{t}_{kl}; \frac{\tau_1 - \bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}, \frac{\tau_2 - \bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)\frac{d\tau}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})} +$$

$$+x_{kl}\int\limits_{\bar{\Delta}_{kl}}\varphi\left(\bar{t}_{kl};\frac{\tau_1-\bar{t}_k}{r(\tau,\bar{t}_{kl})},\frac{\tau_2-\bar{t}_l}{r(\tau,\bar{t}_{kl})}\right)\frac{d\tau}{r^2(\tau,\bar{t}_{kl})}=f(\bar{t}_{kl}),\ k,l=1,2,\ldots,N. \tag{3.14}$$

Здесь $\sum\sum'$ означает суммирование по квадратам Δ_{ij}, не совпадающим и не соприкасающимся с квадратом Δ_{kl}.

Сходимость вычислительной схемы (3.14) обосновывается аналогично обоснованию вычислительной схемы (3.5).

Рассмотрим теперь изменения, которые необходимо внести в вычислительную схему в случае, когда область G не является квадратом. Для простоты обозначений ограничимся случаем, когда символ сингулярного интеграла не зависит от полюса.

Введем параметр H и покроем область G квадратами со стороной H. Назовем квадрат внутренним, если расстояние между этим квадратом и границей Γ области G не меньше H. Квадраты, не удовлетворяющие этому условию, назовем граничными.

Пронумеруем в каком-нибудь порядке все граничные квадраты натуральными числами от 1 до m. Пересечение j-го граничного квадрата с областью G обозначим через g_j, $j=\overline{1,m}$.

Пронумеруем в каком-нибудь порядке все внутренние квадраты натуральными числами от 1 до N и обозначим их через Δ_k, $k = \overline{1,N}$. Построим покрытие области G более мелкими областями Δ_k^*, $k=\overline{1,N}$, которые определяются следующим образом: $\Delta_k^*=\Delta_k$, если пересечение области Δ_k с областями g_j пусто, и Δ_k^* является объединением области Δ_k с теми из областей g_j, которые имеют непустое пересечение с Δ_k. Отметим, что каждая из областей g_j, $j=\overline{1,m}$, может входить только в одну из областей Δ_k^*, $k=\overline{1,N}$. Покрытие области G областями Δ_k^* проиллюстрировано на рис. 4.

При этом, естественно, возможна неоднозначность в определении областей Δ_k^*, $k=\overline{1,N}$. Из рис. 4 видно, что в качестве области Δ_1^* можно взять область $\Delta_1\cup g_{20}$ или $\Delta_1\cup g_1\cup g_{20}\cup g_{19}$. Способ построения областей Δ_k^*, $k=\overline{1,N}$, как будет видно из дальнейших рассуждений, не влияет ни на построение вычислительной схемы, ни на оценки сходимости приближенного метода.

Внутренние квадраты Δ_k^* назовем отмеченными, если они граничат только с внутренними квадратами. Пусть общее число отмеченных квадратов равно N^*. Будем обозначать отмеченные квадраты через $\Delta_k^{\text{отм}}$, $k=\overline{1,N^*}$. Неотмеченные внутренние квадраты будем обозначать через $\Delta_j^{\text{н}}$, $j=\overline{1,m}$. Очевидно, что каждый неотмеченный квадрат $\Delta_j^{\text{н}}$ входит в множество Δ_j^*, $j=\overline{1,m}$.

Введем еще одно обозначение. Пусть имеется m^* отмеченных квадратов $\Delta_j^{\text{отм}}$, $j=\overline{1,m^*}$, имеющих общие ребра с неотмеченными квадратами. Эти отмеченные квадраты обозначим через $\Delta_j^{*\text{отм}}$, $j = \overline{1, m^*}$. Построим объединение квадратов $\Delta_j^{*\text{отм}}$ с областями Δ_l^*, $l = \overline{1, m}$. В результате построения получаем m^* областей $\bar{\Delta}_j$, $j = \overline{1, m^*}$. Каждая из областей $\bar{\Delta}_j$ является объединением одного квадрата $\bar{\Delta}_j^{*\text{отм}}$, $j = \overline{1, m^*}$ и одной или нескольких областей Δ_k^*, $k = \overline{1, m}$, имеющих с $\bar{\Delta}_j^{*\text{отм}}$ общие ребра.

Из рисунка 4 видно, что область $\bar{\Delta}_1$ определяется формулой $\bar{\Delta}_1 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_5 \cup \Delta_6 \cup \Delta_7 \cup g_{18} \cup \ldots \cup g_1$.

Аналогичным образом определяются остальные области $\bar{\Delta}_j$, $j = \overline{2, m^*}$. Для простоты обозначений оставшиеся отмеченные квадраты Δ_k обозначим через $\bar{\Delta}_k$. Таким образом, область G покрыта областями $\bar{\Delta}_k$, $k = \overline{1, N^*}$.

Приближенное решение уравнения (3.3) будем искать в виде кусоч-
но-постоянной функции $\bar{x}(t_1, t_2)$, равной $\bar{x}_k$ в областях $\bar{\Delta}_k$, $k = \overline{1, N^*}$. Неизвестные $\bar{x}_k$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(M_k)\bar{x}_k + d_k(M_k)\bar{x}_k + \sum_{j=1}^{N^*}{}' \bar{d}_j(M_k)\bar{x}_j = f(M_k), \qquad k = \overline{1, N^*},$$

где $d_k(M_k) = \int\limits_{\bar{\Delta}_k^{*\text{отм}}} \varphi\left(\frac{v_k - \tau_1}{r(M_k,\tau)}, \frac{w_k - \tau_2}{r(M_k,\tau)}\right) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r^2(M_k,\tau)}$,

$$\bar{d}_j(M_k) = \int\limits_{\bar{\Delta}_j} \varphi\left(\frac{v_k - \tau_1}{r(M_k,\tau)}, \frac{w_k - \tau_2}{r(M_k,\tau)}\right) \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r^2(M_k,\tau)},$$

$M_k = (v_k, w_k)$, $k = \overline{1, N^*}$, $\bar{\Delta}_k^{*\text{отм}}$– отмеченный квадрат, входящий в область $\bar{\Delta}_k$, $\sum'$ означает суммирование по областям $\bar{\Delta}_j$, не имеющим пересечения с областью $\bar{\Delta}_k$, $k = \overline{1, N^*}$.

Выбор точек M_k, $k = \overline{1, N^*}$, и обоснование вычислительной схемы проводятся по методике, изложенной выше при доказательстве теоремы 3.1.

3.2. Приближенное решение нелинейных многомерных сингулярных интегральных уравнений

В этом параграфе излагаются результаты статьи [49], посвященной построению и обосновыванию проекционных методов решения уравнений вида (3.2). Для простоты обозначений будем считать, что $E = G = [-A, A]^2$.

Уравнение (3.2) будем рассматривать в предположении, что функция $a(t, x)$ имеет вторую частную производную по второй переменной, а функция $\varphi(t,\Theta,x)$ имеет вторую частную производную по третьей переменной, причем эти производные по всем переменным удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, $0<\alpha\le 1$.

Исследовать данное уравнение будем в банаховом пространстве X функций $x(t_1,\ldots,t_l)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем β $(0<\beta<\alpha)$ по каждой переменной. Норма в пространстве X вводится формулой

$$||x(t_1,\ldots,t_l)||=\max_{t\in G}|x(t_1,\ldots,t_l)|+\sup_{r(t,\tau)\neq 0}\frac{|x(t)-x(\tau)|}{(r(t,\tau))^{\beta}},$$

где $t=(t_1,\ldots,t_l)$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$, $r(t,\tau)=\left[(t_1-\tau_1)^2+\ldots+(t_l-\tau_l)^2\right]^{1/2}$.

Можно показать, что при выполнении приведенных выше условий производная Фреше оператора $K(x)$ в точке x_0 равна

$$K'(x_0)z\equiv a_2'(t,x_0(t))z(t)+\int\limits_G\frac{\varphi_3'(t,\Theta,x_0(\tau))z(\tau)}{r^l(t,\tau)}d\tau,$$

где через $a_2'(t,u)$ и ${\varphi_3}'(t,\Theta,u)$ обозначены, соответственно, производные по второй и третьей переменной функций $a_2(t,u)$ и $\varphi_3'(t,\Theta,u)$.

Предположим, что на начальном элементе x_0 оператор $K'(x_0)$ непрерывно обратим в пространстве X. Приближенное решение уравнения (3.2) будем искать по итерационной схеме

$$x_{n+1}=x_n-[K'(x_0)]^{-1}K(x_n).\tag{3.15}$$

Из теоремы 6.7 введения следует, что при достаточно хорошем начальном приближении итерационный процесс (3.15) сходится к решению $x^*(t)$ уравнения (3.2).

Поскольку практическое применение итерационного процесса (3.15) затруднительно, возникает необходимость в построении эффективной вычислительной схемы. Для простоты обозначений будем полагать $l=2$.

Будем искать приближенное решение уравнения (3.2) в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t_1,t_2)$, построение которой описано в предыдущем параграфе. При этом используются обозначения предыдущего параграфа. Значения x_{kl} находятся из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$a(\bar t_{kl},x_{kl})+\sum_{i=2}^{N-1}\sum_{j=2}^{N-1}\bar d_{ij}(\bar t_{kl})=f(\bar t_{kl}),\qquad k,l=\overline{2,N-1},\tag{3.16}$$

где $t_{kl}=(t_k,t_l)$, $h=\frac{2A}{N}$, $\bar d_{ij}(\bar t_{kl})=\int\limits_{\bar\Delta_{ij}}\varphi\left(\bar t_{kl},\frac{\bar t_{kl}-\tau}{r(\bar t_{kl},\tau)},x_{ij}\right)\frac{d\tau}{r^2(\bar t_{kl},\tau)}$,

$\bar t_{kl}=(t_k+\bar h_1,t_l+\bar h_2)$, способ определения величин $\bar h_1$ и $\bar h_2$ будет описан ниже. Матрицу, описывающую левую часть системы (3.16), обозначим через K_N.

В пространстве R_M, $M=(N-2)^2$, вычислим производную Фреше оператора K_N в начальном значении $x^0=\{x^0_{ij}\}$, $i,j=\overline{2,N-1}$. Нетрудно видеть, что эта производная равна

$$a'_2(\bar t_{kl},x^0_{kl})z_{kl}+\sum_{i=2}^{N-1}\sum_{j=2}^{N-1}\bar d^0_{ij}(\bar t_{kl})z_{ij},\qquad k,l=\overline{2,N-1},\tag{3.17}$$

где $\bar d^0_{ij}(\bar t_{kl})=\int\limits_{\bar\Delta_{ij}}\varphi'_3\left(\bar t_{kl},\frac{\bar t_{kl}-\tau}{r(\bar t_{kl},\tau)},x^0_{ij}\right)\frac{d\tau}{r^2(\bar t_{kl},\tau)}$.

Система уравнений (3.16) в операторной форме записывается уравнением $K_N(x_N)=f_N$. Производную Фреше (3.17) оператора $K_N(x_N)$ в точке x^0 обозначим через $K'_N(x^0)z_N$. Наряду с оператором $K'_N(x^0)z_N$ введем оператор $\bar K'_N(x^0)z_N$, который определяется выражением

$$a'_2(\bar t_{kl},x^0_{kl})z_{kl}+\sum_{i=2}^{N-1}\sum_{j=2}^{N-1}{}'\bar d^*_{ij}(\bar t_{kl})z_{ij}+d^*_{kl}(\bar t_{kl})z_{kl},\qquad k,l=\overline{2,N-2},\tag{3.18}$$

Здесь $\sum\sum'$ означает суммирование по прямоугольникам Δ_{ij}, не имеющим общих граней с квадратом Δ_{kl},

$d^*_{ij}(\bar t_{kl})=\int\limits_{\Delta_{ij}}\varphi'_3\left(\bar t_{kl},\frac{\bar t_{kl}-\tau}{r(\bar t_{kl},\tau)},x^0_{ij}\right)\frac{d\tau}{r^2(\bar t_{kl},\tau)}$,

$\bar d^*_{ij}(\bar t_{kl})=\int\limits_{\bar\Delta_{ij}}\varphi'_3\left(\bar t_{kl},\frac{\bar t_{kl}-\tau}{r(\bar t_{kl},\tau)},x^0_{ij}\right)\frac{d\tau}{r^2(\bar t_{kl},\tau)}$.

В предыдущем параграфе было показано, что можно таким образом выбрать значения $\bar h_1$ и $\bar h_2$, что оператор $\bar K'_N(x^0)$ будет непрерывно обратим в R_M. При этом $\bar h_1$ и $\bar h_2$ можно выбрать таким образом, что $||[\bar K'_N(x^0)]^{-1}||_{R_M}$ будет достаточно мала.

Систему уравнений (3.16) будем решать модифицированным методом Ньютона – Канторовича

$$x^{m+1}_N=x^m_N-[\bar K'_N(x^0)]^{-1}K_Nx^m_N.\tag{3.19}$$

Здесь $x^m_N=\{x^m_{kl}\}$, $k,l=\overline{2,N-1}$.

Для доказательства сходимости итерационной схемы (3.19) воспользуемся теоремой 6.8, приведенной во введении. Для этого в метрике пространства R_M оценим норму

$$\|K_N x_N^m - K_N x_N^{m-1}\| = \|K_N'(x_N^{m-1} + \Theta(x_N^m - x_N^{m-1}))(x_N^m - x_N^{m-1})\| \leq$$
$$\leq \|K_N'(x_N^{m-1} + \Theta(x_N^m - x_N^{m-1}))\| \|x_N^m - x_N^{m-1}\|.$$

Если все последовательные приближения x_N^m, $m = 0, 1, \ldots$, не выходят из сферы $S(x_N^0, r)$ с центром в точке x_0 и радиусом r, то, как следует из выражения (3.17) производной Фреше, для любого $u \in S(x_N^0, r)$ выполняется $||\bar{K}_N'(u)|| \leq L$, $0 < L < \infty$. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, можно показать, что $||K'(u_1) - \bar{K}'(u_2)|| \leq L_1(N^{-\alpha} + ||u_1 - u_2||)$ для всех $u_1, u_2 \in S(x_N^0, r)$. Поэтому при достаточно хорошем начальном приближении и достаточно большом N выполнены все условия теоремы 3.2 и итерационный процесс сходится к решению x_N^* уравнения $K_N x_N = f_N$.

Оценим близость решения x^* уравнения (3.2) и решения x_N^* уравнения $K_N x_N = f_N$. Предположим, что решение x^* уравнения (3.2) принадлежит классу Гельдера H_α, $0 < \alpha \leq 1$. Обозначим через $\tilde{x}_N^*$ наилучшее приближение функции $x^*(t)$ кусочно- постоянными функциями.

Тогда $||x^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)|| \leq AN^{-\alpha}$.

Очевидно,

$$||K_N(\tilde{x}_N^*(t))||_{R_M} =$$
$$= \max_{k,l} \left| a(\bar{t}_{kl}, \tilde{x}_{kl}^*) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\bar{\Delta}_{ij}} \varphi\left(\bar{t}_{kl}, \frac{\bar{t}_{kl} - \tau}{r(\bar{t}_{kl}, \tau)}, \tilde{x}_{ij}^*\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl}, \tau)} - f(\bar{t}_{kl}) \right| \leq$$
$$\leq \max_{k,l} \left| \left(a(\bar{t}_{kl}, \tilde{x}_{kl}^*) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\bar{\Delta}_{ij}} \varphi\left(\bar{t}_{kl}, \frac{\bar{t}_{kl} - \tau}{r(\bar{t}_{kl}, \tau)}, \tilde{x}_{ij}^*\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl}, \tau)} - f(\bar{t}_{kl}) \right) - \right.$$
$$\left. - \left(a(\bar{t}_{kl}, x^*) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\bar{\Delta}_{ij}} \varphi\left(\bar{t}_{kl}, \frac{\bar{t}_{kl} - \tau}{r(\bar{t}_{kl}, \tau)}, x^*\right) \frac{d\tau}{r^2(\bar{t}_{kl}, \tau)} - f(\bar{t}_{kl}) \right) \right| \leq$$
$$\leq L \max_{k,l} ||\tilde{x}_{kl}^* - x^*||_{\bar{\Delta}_{kl}} \leq ALN^{-\alpha}.$$

Поэтому, выбрав $\tilde{x}_N^*$ в качестве начального приближения в итерационном процессе (3.19), имеем $||K_N(\tilde{x}_N^*)|| \leq ALN^{-\alpha}$ и $||x_N^* - \tilde{x}_N^*|| \leq$
$\leq AN^{-\alpha}$, где x_N^* – решение уравнения $K_N x_N = f_N$. Следовательно,

$$||x^* - x_N^*|| \leq ||x^* - \tilde{x}_N^*|| + ||\tilde{x}_N^* - x_N^*|| \leq AN^{-\alpha}.$$

Таким образом, доказано, следующее утверждение.

Теорема 3.2. Пусть выполнены следующие условия:
1) в уравнении (3.2) функции $a_2'(t,x)$, $\varphi_3'(t,\tau,x)$, $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α;
2) уравнение (3.2) имеет единственное решение x^* в некоторой сфере $S(x^*,r)$;
3) функция $\varphi(t,\tau,x)$ явным образом не зависит от t и в некоторой окрестности точки x^* имеет конечное число прямых, на которых она обращается в нуль.

Тогда система (3.16) в сфере $S(x^*,r)$ имеет единственное решение x_N^*, к которому сходится модифицированный метод Ньютона – Канторовича, причем справедлива оценка $||x^* - x_N^*|| \le AN^{-\alpha}$.

Замечание. Эта теорема распространяется и на общие уравнения вида (3.2) при условии, что можно таким образом выбрать точки $\bar{t}_{kl}$, чтобы оператор (3.17) был обратим.

4. Приближенное решение бисингулярных интегральных уравнений методом дискретных особенностей

4.1. Приближенное решение линейных бисингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим бисингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t_1,t_2)x(t_1,t_2) + b(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,t_2)}{\tau_1 - t_1}d\tau_1 +$$

$$+c(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(t_1,\tau_2)}{\tau_2 - t_2}d\tau_2 + d(t_1,t_2)\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} h(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1,t_2), \qquad (4.1)$$

где a,b,c,d,h,f – функции, имеющие производные до r-го порядка по всем переменным.

Полученные ниже результаты легко распространяются на уравнение любой конечной размерности.

Разделим область $\Omega = [-1,1]^2$ на n^2 частей $\Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}]$, где $t_k = -1 + 2k/n$, $k = 0,1,\ldots,n$. В каждом квадрате Δ_{kl} построим полином $L_r(f,\Delta_{kl})$, интерполирующий функцию $f(t_1,t_2)$ на сетке узлов (t_i^k, t_j^l), где $t_i^k = t_k + (t_{k+1} - t_k)i/(r+1)$, $i = 1,2,\ldots,r$, $k,l = 0,1,\ldots,n-1$. Полином $L_r(f,\Delta_{kl})$ имеет вид

$$L_r(f,\Delta_{kl}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} f(t_i^k, t_j^l)\psi_{ki}(t_1)\psi_{lj}(t_2),$$

где $\psi_{ki}(t_1)$ и $\psi_{lj}(t_2)$ – фундаментальные полиномы по узлам t_i^k и t_j^l, соответственно.

Сплайн, составленный из полиномов $L_r(f, \Delta_{kl})$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, обозначим через $f_{nn}(t_1, t_2)$.

Каждой точке t_i^k поставим в соответствие сегмент $\Delta_k^i = [t_i^k - -qh^*, t_i^k + h^*]$. Каждому узлу $M^{kl} = (t_i^k, t_j^l)$ поставим в соответствие прямоугольник $\Delta_{kl}^{ij} = [t_i^k - qh^*, t_i^k + h^*; t_j^l - qh^*, t_j^l + h^*]$, где $h^* (0 < h^* < < h/(r+1))$ и q – параметры, выбор которых описан ниже, $h = 2/n$.

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде сплайна $x_{nn}(t_1, t_2)$, составленного из полиномов $L_r(x, \Delta_{kl})$ со значениями $x_{ij}^{kl} = x(t_i^k, t_j^l)$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, требующими определения. Значения x_{ij}^{kl} определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a(t_i^k, t_j^l) x_{ij}^{kl} + b(t_i^k, t_j^l) \int\limits_{\Delta_k^i} \frac{x_{nn}(\tau_1, t_j^l)}{\tau_1 - t_i^k} d\tau_1 + c(t_i^k, t_j^l) \int\limits_{\Delta_l^j} \frac{x_n(t_i^k, \tau_2)}{\tau_2 - t_j^l} d\tau_2 +$$

$$+ d(t_i^k, t_j^l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}^{ij}} \frac{x_n(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_i^k)(\tau_2 - t_j^l)} + b(t_i^k, t_j^l) \sum_{k_1=0}^{n-1}{}' \int\limits_{\Delta_{k_1}} \frac{x_{nn}(\tau_1, t_j^l)}{\tau_1 - t_i^k} d\tau_1 +$$

$$+ c(t_i^k, t_j^l) \sum_{l_1=0}^{n-1}{}' \int\limits_{\Delta_{l_1}} \frac{x_{nn}(t_i^k, \tau_2)}{\tau_2 - t_j^l} d\tau_2 + d(t_i^k, t_j^l) \sum_{k_1=0}^{n-1}{}' \sum_{l_1=0}^{n-1}{}' \int\limits_{\Delta_{k_1 l_1}} \frac{x_{nn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_i^k)(\tau_2 - t_j^l)} +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{l_1=0}^{n-1} \int\limits_{\Delta_{k_1 l_1}} h(t_i^k, t_j^l, \tau_1, \tau_2) x_{nn}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = f(t_i^k, t_j^l), \qquad (4.2)$$

$i, j = 1, 2, \ldots, r$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Здесь $\sum_{k_1}{}'$ означает суммирование по $k_1 \neq k-1, k, k+1, \sum_{l_1}{}'$ означает суммирование по $l_1 \neq l-1, l, l+1$.

Все используемые в вычислительной схеме (4.2) интегралы вычисляются по кубатурным формулам [27], [34]. Как будет видно из дальнейших рассуждений, замена интегралов кубатурными формулами не оказывает существенного влияния на быстроту сходимости. В точках t_i^k и t_j^l фундаментальные полиномы $\psi_{ki}(t_i^k)$ и $\psi_{lj}(t_j^l)$ равны единице. Можно выбрать такое h^*, что в h^* окрестности точек t_i^k и t_j^l нет других узлов фундаментальных полиномов.

В системе уравнений (4.2) элементы, стоящие на главной диагонали, имеют вид

$$\gamma_{ij}^{kl} = a(t_i^k, t_j^l) + b(t_i^k, t_j^l) \int\limits_{\Delta_k^i} \frac{\psi_{ki}(\tau_1)}{\tau_1 - t_i^k} d\tau_1 +$$

$$+ c(t_i^k, t_j^l) \int\limits_{\Delta_l^j} \frac{\psi_{lj}(\tau_2)}{\tau_2 - t_j^l} d\tau_2 + d(t_i^k, t_j^l) \int\int\limits_{\Delta_{kl}^{ij}} \frac{\psi_{ki}(\tau_1)\psi_{lj}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_i^k)(\tau_2 - t_j^l)} +$$

$$+ \int\int\limits_{\Delta_{kl}} h(t_i^k, t_j^l, \tau_1, \tau_2)\psi_{ki}(\tau_1)\psi_{lj}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{4.3}$$

Если, по крайней мере, одно из значений $b(t_i^k, t_j^l), c(t_i^k, t_j^l), d(t_i^k, t_j^l)$ отлично от нуля, то за счет выбора параметров q и h^* можно добиться того, что число γ_{ij}^{kl} будет как угодно велико. Отметим, что если знаки слагаемых в выражении γ_{ij} различны и слагаемые "погашают" друг друга, то каждому узлу t_i^k и t_j^l можно поставить в соответствие сегменты $[-q_i^k h_i^k + t_i^k, t_i^k + h_i^k]$ и $[-q_j^l h_j^l + t_j^l, t_j^l + h_j^l]$, $i, j = 1, 2, \ldots, r, k, l =$
$= 0, 1, \ldots, n-1$. При этом прямоугольник Δ_{kl}^{ij} можно определить независимо от описанных выше сегментов, $\Delta_{kl}^{ij} = [-\bar{q}_i^k \bar{h}_i^k + t_i^k, t_i^k + \bar{h}_i^k; -\bar{q}_j^l \bar{h}_j^l + t_j^l, t_j^l + \bar{h}_j^l]$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, $k, l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Повторяя проведенные выше выкладки, можно показать, что в каждой строке матрицы G сумма модулей всех элементов, за исключением элемента, стоящего на главной диагонали, не превосходит величины порядка $ln^2 n$. Следовательно, можно выбрать параметры q_i^k, q_j^l, h_i^k, h_j^l (а в случае необходимости и параметры $\bar{q}_i^k$, $\bar{q}_j^l$, $\bar{h}_i^k$, $\bar{h}_j^l$) таким образом, чтобы система уравнений (4.2) была однозначно разрешима в силу теоремы Адамара об обратимости матриц .

После того, как установлена однозначная разрешимость системы уравнений (4.2), близость точного решения уравнения (4.1) и приближенного решения $x_{nn}(t_1, t_2)$ оценивается по аналогии с рассуждениями, проведенными в §7 главы III и в §2 данной главы.

4.2. Приближенное решение нелинейных бисингулярных интегральных уравнений

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением характеристического бисингулярного интегрального уравнения

$$Kx \equiv a(t_1, t_2, x(t_1, t_2)) + \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(t_1, t_2, x(\tau_1, t_2))}{\tau_1 - t_1} d\tau_1 +$$

$$+\int_{-1}^{1} \frac{c(t_1,t_2,x(t_1,\tau_2))}{\tau_2-t_1}d\tau_2+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{d(t_1,t_2,x(\tau_1,\tau_2))}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2 =$$
$$= f(t_1,t_2), \qquad (4.4)$$

так как отсутствие компактного оператора не влияет на общность рассуждений. Здесь a, b, c, d, f – функции, имеющие производные до
r-го порядка по всем переменным.

Будем считать, что в пространстве X существует сфера $S(x^*, \delta)$ с центром в точке x^* и радиусом δ, в которой существует единственное решение x^* уравнения (4.4).

Приближенное решение уравнения (4.4) будем искать в виде сплайна $x_{nn}(t_1,t_2)$. описание которого приведено в предыдущем пункте.

Обозначим через P_{nn} оператор, проектирующий пространство непрерывных функций $C([-1,1]^2)$ на множество упомянутых выше локальных сплайнов: $P_{nn}f = f_{nn}$.

Тогда метод коллокации для уравнения (4.4) имеет вид

$$K_{nn}x_{nn} \equiv P_{nn}\left[a(t_1,t_2,x_{nn}(t_1,t_2)) + \int_{-1}^{1} \frac{b(t_1,t_2,x_{nn}(\tau_1,t_2))}{\tau_1-t_1}d\tau_1 + \right.$$
$$\left. +\int_{-1}^{1} \frac{c(t_1,t_2,x_{nn}(t_1,\tau_2))}{\tau_2-t_1}d\tau_2+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{d(t_1,t_2,x_{nn}(\tau_1,\tau_2))}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2\right] =$$
$$= P_{nn}\left[f(t_1,t_2)\right]. \qquad (4.5)$$

Систему уравнений (4.5) решаем модифицированным методом Ньютона – Канторовича. Обоснование этого метода для более сложных многомерных сингулярных интегральных уравнений приведено в следующем параграфе.

5. Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений методом дискретных особенностей

5.1. Приближенное решение линейных уравнений

Рассмотрим многомерное сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)x(t) + b(t)\int_G \frac{\varphi(\Theta)x(\tau)}{r^2(t,\tau)}d\tau = f(t), \qquad (5.1)$$

где G – односвязное многообразие на плоскости E_2. Будем считать, что функции a, b, f, φ имеют производные до r-го порядка по всем переменным.

Результаты, полученные для уравнений вида (5.1), распространяются на уравнения вида

$$a(t)x(t) + \int\limits_G \frac{\varphi(t,\Theta)x(\tau)}{(r(t,\tau))^2}d\tau = f(t). \tag{5.2}$$

Необходимо отметить, что мы ограничиваемся двумерными сингулярными интегральными уравнениями только для простоты обозначений. Из проделанных выкладок будет видно, что полученные результаты практически идентично распространяются на многомерные сингулярные интегральные уравнения любой конечной размерности.

Построим вычислительную схему приближенного решения уравнения (5.1) в предположении, что G – квадрат $[-A, A]^2$, где A – некоторое вещественное число.

Покроем область G квадратами

$\Delta_{kl} = [t_k, t_{k+1}; t_l, t_{l+1}]$, $k, l = \overline{0, N+1}$, $t_k = -A + 2A\dfrac{k}{N+2}$, $k = \overline{0, N+2}$.

Наряду с квадратами Δ_{kl}, $k, l = \overline{0, N+1}$, введем прямоугольники $\bar{\Delta}_{kl}$, $k, l = \overline{1, N}$, которые определяются следующим образом:
$\bar{\Delta}_{kl} = \Delta_{kl}$ при $k = \overline{2, N-1}$ и $l = \overline{2, N-1}$;
$\bar{\Delta}_{11} = \Delta_{00} \cup \Delta_{01} \cup \Delta_{10} \cup \Delta_{11}$;
$\bar{\Delta}_{1,N} = \Delta_{0,N} \cup \Delta_{1,N} \cup \Delta_{0,N+1} \cup \Delta_{1,N+1}$;
$\bar{\Delta}_{N,1} = \Delta_{N,0} \cup \Delta_{N+1,0} \cup \Delta_{N,1} \cup \Delta_{N+1,1}$;
$\bar{\Delta}_{N,N} = \Delta_{N,N} \cup \Delta_{N,N+1} \cup \Delta_{N+1,N} \cup \Delta_{N+1,N+1}$;
$\bar{\Delta}_{1,l} = \Delta_{0,l} \cup \Delta_{1,l}$ при $l = \overline{2, N-1}$;
$\bar{\Delta}_{N,l} = \Delta_{N,l} \cup \Delta_{N+1,l}$ при $l = \overline{2, N-1}$;
$\bar{\Delta}_{k,1} = \Delta_{k,0} \cup \Delta_{k,1}$ при $k = \overline{2, N-1}$;
$\bar{\Delta}_{k,N} = \Delta_{k,N} \cup \Delta_{k,N+1}$ при $k = \overline{2, N-1}$.

Приближенное решение уравнения (5.1) будем искать в виде кусочно-полиномиальной функции $x_{nn}(t_1, t_2)$.

Построение сплайна $x_{nn}(t_1, t_2)$ описано в предыдущем параграфе.

Каждому узлу x_{ij}^{kl} сплайна $x_N(t_1, t_2)$ поставим в соответствие прямоугольник $\Delta_{ij}^{kl} = [t_i^k - q_1 h, t_i^k + h; t_j^l - q_2 h, t_j^l + h]$, где $h < 2A/(rN)$, q_1, q_2– параметры, величины которых будут определены ниже.

Значения x_{ij}^{kl}, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$a_{ij}^{kl}x_{ij}^{kl}+b_{ij}^{kl}\int\limits_{\Delta_{kl}^{ij}}\varphi\left(\frac{\tau_1-t_i^k}{r(\tau,M_{ij}^{kl})},\frac{\tau_2-t_j^l}{r(\tau,M_{ij}^{kl})}\right)\frac{x_{nn}(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,M_{ij}^{kl})}d\tau_1d\tau_2+$$

$$+b_{ij}^{kl}\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{l_1=1}^{N}{}'\int\limits_{\Delta_{kl}}\varphi\left(\frac{\tau_1-t_i^k}{r(\tau,M_{ij}^{kl})},\frac{\tau_2-t_j^l}{r(\tau,M_{ij}^{kl})}\right)\frac{x_{nn}(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,M_{ij}^{kl})}d\tau_1d\tau_2=f_{ij}^{kl}, \tag{5.3}$$

$i,j=1,2,\ldots,r,\ k,l=1,2,\ldots,N,$
где $M_{ij}^{kl}=(t_i^k,t_j^l)$, $a_{ij}^{kl}=a(M_{ij}^{kl})$, $b_{ij}^{kl}=b(M_{ij}^{kl})$, $f_{ij}^{kl}=f(M_{ij}^{kl})$, $i,j=$ $=1,2,\ldots,r,\ k,l=1,2,\ldots,N,$ $\sum\limits_{k_1}\sum\limits_{l_1}{}'$ означает суммирование по значениям $(k_1,l_1)\neq(k+v,l+w)$, где $v,w=-1,0,1$.

Несколько изменяя рассуждения, проведенные в § 3, можно показать, что если характеристика $\varphi(\Theta)$ обращается в нуль на конечном числе лучей, исходящих из начала координат, то выбором параметров q_1,q_2,h можно добиться, чтобы интеграл

$$\left|\int\int\limits_{\Delta_{kl}^{ij}}\varphi\left(\frac{\tau_1-t_i^k}{r(\tau,M_{ij}^{kl})},\frac{\tau_2-t_j^l}{r(\tau,M_{ij}^{kl})}\right)\frac{\psi_{ij}^{kl}(\tau_1,\tau_2)}{r^2(\tau,M_{ij}^{kl})}d\tau_1d\tau_2\right|$$

был как угодно большим.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что выбором параметров q_1,q_2,h можно добиться того, что для системы уравнений (5.3) выполнены условия теоремы Адамара о разрешимости линейных систем уравнений. После того, как доказана однозначная разрешимость системы уравнений (5.3), близость точного решения $x(t_1,t_2)$ уравнения (5.1) и приближенного решения $x_{nn}(t_1,t_2)$ оценивается на основании рассуждений, неоднократно проведенных выше.

5.2. Приближенное решение нелинейных уравнений

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$a(t)x(t)+\int\limits_{G}\frac{\varphi(\Theta)b(t,\tau,x(\tau))}{r^2(t,\tau)}d\tau=f(t). \tag{5.4}$$

Пусть уравнение (5.4) имеет единственное решение $x^*(t),t=(t_1,t_2)$ в некоторой сфере $S(x^*,\delta)$. Как и в предыдущем пункте, для простоты обозначений ограничиваемся двумерными уравнениями с символом, не зависящим от t. Из приведенных рассуждений следует, что все полученные результаты распространяются на уравнения вида (5.2).

Будем считать, что коэффициенты, характеристика и правая часть уравнения (5.4) имеют производные до r порядка по всем аргументам.

Введем пространство X функций $x(t_1, t_2)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем β, $0 < \beta < 1$, по каждой переменной. Норма в пространстве X определяется формулой

$$\|x(t_1, t_2)\| = \max_{t_1, t_2 \in \gamma_{12}} |x(t_1, t_2)| + \max_{t_2 \in \gamma_2} \sup_{t_1' \neq t_1''} \frac{|x(t_1', t_2) - x(t_1'', t_2)|}{|t_1' - t_1''|^\beta} +$$

$$+ \max_{t_1 \in \gamma_1} \sup_{t_2' \neq t_2''} \frac{|x(t_1, t_2') - x(t_1, t_2'')|}{|t_2' - t_2''|^\beta}.$$

Через X_n обозначим подпространство пространства X, состоящее из сплайнов $x_{nn}(t_1, t_2)$, описание которых приведено в предыдущем пункте, а через P_n обозначим оператор, проектирующий пространство непрерывных функций $C([-A, A]^2)$ на множество локальных сплайнов: $P_n f = f_{nn}$.

Приближенное решение уравнения (5.4) будем искать в виде локального сплайна $x_{nn}(t_1, t_2)$ со значениями x_{ij}^{kl}, которые определяются из системы алгебраических уравнений

$$a_{ij}^{kl} x_{ij}^{kl} + \int\limits_{\Delta_{kl}^{ij}} \varphi\left(\frac{\tau_1 - t_i^k}{r(\tau, M_{ij}^{kl})}, \frac{\tau_2 - t_j^l}{r(\tau, M_{ij}^{kl})}\right) \frac{b(M_{ij}^{kl}, \tau_1, \tau_2, x_{nn}(\tau_1, \tau_2))}{r^2(\tau, M_{ij}^{kl})} d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ b_{ij}^{kl} \sum_{k_1=1}^{N} \sum_{l_1=1}^{N}{}' \int\limits_{\Delta_{kl}} \varphi\left(\frac{\tau_1 - t_i^k}{r(\tau, M_{ij}^{kl})}, \frac{\tau_2 - t_j^l}{r(\tau, M_{ij}^{kl})}\right) \frac{b(M_{ij}^{kl}, \tau_1, \tau_2, x_{nn}(\tau_1, \tau_2))}{r^2(\tau, M_{ij}^{kl})} d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= f_{ij}^{kl}, \tag{5.5}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, r$, $k, l = 1, 2, \ldots, N$,
где $M_{ij}^{kl} = (t_i^k, t_j^l)$, $a_{ij}^{kl} = a(M_{ij}^{kl})$, $f_{ij}^{kl} = f(M_{ij}^{kl})$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, $k, l =$ $= 1, 2, \ldots, N$, $\sum\limits_{k_1} \sum\limits_{l_1}{}'$ означает суммирование по значениям $(k_1, l_1) \neq$ $(k +$
$+ v, l + w)$, где $v, w = -1, 0, 1$.

Можно показать, что производная Фреше оператора Kx равна

$$K'(z)x \equiv a(t)x(t) + \int\limits_G \frac{\varphi(\Theta) b_3'(t, \tau, z(\tau)) x(\tau)}{r^2(t, \tau)} d\tau,$$

где $b_3'(t, \tau, u) = b^{(0,0,1)}(t, \tau, u)$.

Будем считать, что этот оператор непрерывно обратим в метрике пространства X при z, принадлежащих сфере $S(x^*, \delta), \delta > 0$. Введем оператор

$$K'_{nn}(z)x \equiv a_{ij}^{kl} x_{ij}^{kl} + \int\limits_{\Delta_{kl}^{ij}} \varphi \left(\frac{\tau_1 - t_i^k}{r(\tau, M_{ij}^{kl})}, \frac{\tau_2 - t_j^l}{r(\tau, M_{ij}^{kl})} \right) \frac{b'_3(M_{ij}^{kl}, \tau, z(\tau)) x_{nn}(\tau)}{r^2(\tau, M_{ij}^{kl})} d\tau +$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{N} \sum_{l_1=1}^{N}{}' \int\limits_{\Delta_{kl}} \varphi \left(\frac{\tau_1 - t_i^k}{r(\tau, M_{ij}^{kl})}, \frac{\tau_2 - t_j^l}{r(\tau, M_{ij}^{kl})} \right) \frac{b'_3(M_{ij}^{kl}, \tau, z(\tau)) x_{nn}(\tau) d\tau}{r^2(\tau, M_{ij}^{kl})}, \tag{5.6}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, r, \ \ k, l = 1, 2, \ldots, N.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, можно показать (используя обозначения предыдущего пункта), что оператор $K'_{nn}(z)x$ непрерывно обратим в метрике пространства R_m,
$m = N^2$.

Для удобства описания предлагаемой вычислительной схемы представим значения x_{ij}^{kl} в виде вектора $\bar{X}_m = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$. При этом способ трансформации значений $x_{ij}^{kl}, i, j = 1, 2, \ldots, r, \ k, l = 0, 1, \ldots, N-1$, в элементы $\bar{x}_v, v = 1, \ldots, m$, не имеет принципиального значения.

Оператор (5.6) можно в матричном виде представить выражением

$$\Gamma_m \bar{X}_m,$$

где $\Gamma_m = \{\gamma_{ij}\}, i, j = 1, 2, \ldots, m,$ – матрица, составленная из элементов γ_{ij}. Явный вид этих элементов не выписывается из-за их громоздкости. Точно так же систему уравнений (5.5) можно записать в матричной форме

$$\bar{K}_m \bar{X}_m = F_m. \tag{5.7}$$

Обозначения $\bar{K}_m$ и F_m очевидны.

Решение системы уравнений (5.5) будем искать модифицированным методом Ньютона – Канторовича

$$\bar{X}_m^{n+1} = \bar{X}_m^n - \Gamma_m^{-1}(\bar{K}_m \bar{X}_m^n - F_m), \ n = 0, 1, \ldots. \tag{5.8}$$

Обоснование вычислительной схемы (5.8) проводится так же, как и для полисингулярных интегральных уравнений.

Список литературы

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. - М.: Наука, 1965. - 407 с.

2. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов/ А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман.- М.: Мир. 1979. - 536 с.

3. Бабенко К.И. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР, 1960.- Т. 132.- N 2. - С. 247-250.

4. Бабенко К.И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа // Успехи математических наук, 1985. - Т.40. - Вып.1. - С. 3 - 28.

5. Бабенко К.И. Основы численного анализа.- М.: Наука, 1986. - 744 с.

6. Бахвалов Н.С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970. - Т.10. - N 3. - С.555 - 568.

7. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. - М.: Наука, 1965. - 244 с.

8. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях/ С.М. Белоцерковский , И.К. Лифанов. - М.: Наука, 1985. - 256 с.

9. Боголюбов Н.Н. Применение методов Н.И.Мусхелишвили в теории элементарных частиц/ Н.Н Боголюбов , В.А. Мещеряков, А.Н. Тавхелидзе // Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа. - Тбилиси: Мецниереба, 1971. - Т. 1. - С. 5 - 11.

10. Бойков И.В. О приближенном решении нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Сб. аспирант. работ. Точные науки. - Казань: Изд-во КГУ, 1970.-
С. 61-72.

11. Бойков И.В. О приближенном решении некоторых типов интегральных уравнений с особенностями // Сб. аспирант. работ. Точные науки. - Казань: Изд-во КГУ, 1970.- С. 73-81.

12. Бойков И.В. Некоторые вопросы приближенного решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона-Канторовича // Сб. аспирант. работ. Точные науки. - Казань: Изд-во КГУ, 1970.-
С. 82-94.

13. Бойков И.В. О применении метода механических квадратур к приближенному решению нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Функц. анализ и теория функций. Сб.- Казань: Изд-во КГУ, 1970.- С. 3-12.

14. Бойков И.В. Об одном методе приближенного решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений // Функц. анализ и теория функций. Сб.- Казань: Изд-во КГУ, 1970.- С. 13-21.

15. Бойков И.В. Некоторые вопросы метода Ньютона — Канторовича // Известия вузов. Математика. 1970. - N 8. - С. 9 (аннотация статьи, принятой к печати).

16. Бойков И.В. К методу механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений с непрерывными коэффициентами // Сб. аспирант. работ. Точные науки. - Казань: Изд-во КГУ, 1971.-
С. 140-147.

17. Бойков И.В. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений// ДАН СССР, 1972.- Т. 203.- N 3.- С. 511-514.

18. Бойков И.В. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений// Матем. заметки, 1972.- Т.12.- N 2.- С. 177-186.

19. Бойков И.В. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1972.- Т.12.- N 6.- С. 1381-1390.

20. Бойков И.В. Приближенное решение интегро-дифференциаль-

ных уравнений с интегралом в смысле Адамара // Ученые записки Пенз. политехн. ин-т.- Пенза: Изд-во Пенз. политехн. ин-т.- Вып. 4, 1973.- С. 42-61.

21. Бойков И.В. Принцип компактной аппроксимации в возмущенном методе Галеркина// ДАН СССР, 1974.- Т. 215.- N 1.- С. 11-14.

22. Бойков И.В. О приближенном нахождении всех решений функциональных уравнений// ДАН СССР, 1974.- Т. 217.- N 6.- С. 1241-1244.

23. Бойков И.В. Приближенные методы решения задач гравиметрии // Вопросы теории и методики гравитационных измерений на движущемся основании. Сб.- Москва: Институт физики Земли АН СССР, 1976. - С. 112-121.

24. Бойков И.В. О приближенном решении особых интегральных уравнений гравиметрии// Исслед. по динамич. гравиметрии. Сб.- Москва: Институт физики Земли АН СССР, 1977.- С. 118-152.

25. Бойков И.В. Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений и их приложения // Применение вычисл. методов в научно-техн. иссл. Межвуз.сб. Пенза: Изд-во Пенз. политехн. ин-т.- Вып. 2, 1980. С. 3-18.

26. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях// Методы измерений и обраб. набл. в морской гравиметрии. Сб.- Москва: Ин-т

физики Земли АН СССР, 1980.- С. 108-124.
27. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов.- Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1983.- 210 с.
28. Бойков И.В. Оптимальные методы вычислений в задачах автоматического регулирования.- Пенза: Изд-во Пенз. политехн. ин-т, 1983.- 96 с.
29. Бойков И.В. Об одном исключительном случае сингулярных интегральных уравнений// Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях.- Межвуз. сб. науч.тр. - Вып. 6. - Пенза: Изд-во Пенз. политехн. ин-т, 1984.- С. 3-11.
30. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов // Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз.сб.науч.тр. - Пенза: Пенз. политехн.ин-т, 1987. - Вып.8. -
С. 4 - 22.
31. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов и решения сингулярных интегральных уравнений: Дис. ... д-ра физ.- мат. наук. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР. - 1991.- 474 с.
32. Бойков И.В. Аналитические методы идентификации динамических систем.- Пенза: Изд-во Пенз. политех. ин-т, 1992.- 112 с.
33. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов: Ч. 1.- Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. - 214 с.
34. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов: Ч. 2.- Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. - 128 с.
35. Бойков И.В. Оптимальные методы решения некоторых классов интегральных уравнений// Дифференциальные уравнения, 1997.- Т.33.- N 9.- С. 1155-1166.
36. Бойков И.В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1998.- Т. 38.- N 1.- С. 25-33.
37. Бойков И.В. Оптимальные по сложности алгоритмы приближенного решения интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1998.- Т 34.- N 9.- С. 1240-1245.
38. Бойков И.В. Итерационные методы решения уравнений в свертках // Известия вузов. Математика, 1998.- N 2.- С. 8-15.
39. Бойков И.В. Оптимальные алгоритмы восстановления функций и вычисления интегралов на одном классе бесконечно дифференцируемых функций // Известия вузов. Математика, 1998.- N 9.-

С. 14-20.

40. Бойков И.В. Оптимальные по сложности алгоритмы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1999.- Т. 34.- N 9.- С. 1199-1206.

41. Бойков И.В. Оптимальные методы вычисления полисингулярных интегралов и решение полисингулярных интегральных уравнений// Труды Средневолжского математического общества, 2003.- Т.5.- N 1.- С. 109-118.

42. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений/ И.В. Бойков, Н.Ф. Добрынина, Л.Н. Домнин - Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1996.- 188 с.

43. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегродифференциальных уравнений/ И.В. Бойков, И.И. Жечев // Сб. аспирант. работ. Точные науки. - Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 1972.- С.169-174.

44. Бойков И.В. К приближенному решению сингулярных интегро-дифференциальных уравнений 1 [линейные уравнения] / И.В. Бойков, И.И. Жечев // Дифференциальные уравнения, 1973.- Т.9.- N 8 .-
С. 1493-1502.

45. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегродифференциальных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования/ И.В. Бойков, И.И. Жечев // Приложение функционального анализа к приближенным вычислениям: Сб. - Казань: Изд-во Казан. гос.ун-та, 1974.- С. 21-28.

46. Бойков И.В. К приближенному решению сингулярных интегро- дифференциальных уравнений II/ И.В. Бойков, И.И. Жечев // Дифференциальные уравнения, 1975.- Т. 11.- N 3.- С. 562-571.

47. Бойков И.В. Об одном приближенном методе решения многомерных сингулярных интегральных уравнений/ И.В. Бойков , Ю.Ф. Захарова // Надежность и качество: Тр. Международного симпозиума. - Пенза, 2002.- С. 185-187.

48. Бойков И.В. Приближенные методы решения многомерных сингулярных интегральных уравнений/ И.В. Бойков , Ю.Ф. Захарова // Деп. в ВИНИТИ.- N 1539 - В. 2002.- 03.09.02.- 13 с.

49. Бойков И.В. Приближенные методы решения многомерных сингулярных интегральных уравнений/ И.В. Бойков , Ю.Ф. Захарова // Вопросы математического анализа: Сб. науч. тр. - Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2003.- Вып. 6.- С. 30-50.

50. Бойков И.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях/ И.В. Бойков , Н.Ю. Кудряшова // Дифференциальные уравнения, 2000. - Т. 35-

N 9. -С. 1230-1237.

51. Бойков И.В. Об одном приближенном методе решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях/ И.В. Бойков , Н.Ю. Кудряшова // Надежность и качество: Тр. Международного симпозиума. - Пенза, 2002.- С. 187-189.

52. Бойков И.В. Итерационные методы решения многомерных сингулярных интегральных уравнений/ И.В. Бойков, Н.В. Мойко // Синтез и сложность управляющих систем: Материалы XII-й Международной школы-семинара.- М.: МГУ, 2001.- Ч. I.- С. 31-36.

53. Бойков И.В. Оптимальные по точности приближенные методы решения интегральных уравнений Вольтерра/ И.В. Бойков, А.Н. Тында //Дифференциальные уравнения, 2002.- N 9.- С. 1225-1232.

54. Бойков И.В. Оптимальные по точности приближенные методы решения многомерных слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра второго рода/ И.В. Бойков, А.Н. Тында // Надежность и качество: Тр. Международного симпозиума. - Пенза: Пенз. гос. ун-т., 2002.- С. 163-167.

55. Бойков И.В. Сверхсходимость приближенного решения многомерных интегральных уравнений Вольтерра/ И.В. Бойков, А.Н. Тында // Труды Средневолжского математического общества, 2003.- Т.5.- N 1.- С. 119-126.

56. Вайникко Г.М. О гладкости решения многомерных слабосингулярных интегральных уравнений// Математический сборник, 1989. Т. 180.- N 12. - С. 1709—1723.

57. Вайникко Г.М. Методы решения слабосингулярных интегральных уравнений/ Г.М. Вайникко , А. Педас, П. Уба .- Тарту: Тарту с. гос. ун-т, 1984. - 94 с.

58. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции . М.: ГИФМЛ, 1959.- 628 с.

59. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. - М.: Наука, 1970. - 380 с.

60. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы /А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков .- Киев: Наукова думка, 1986. - 544 с.

61. Витушкин А.Г. К тринадцатой проблеме Гильберта // Доклады АН СССР, 1955. - Т.95. - N 4. - С.701 - 704.

62. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования.- М.: ГИФМЛ, 1959. - 228 с.

63. Ворович И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости/ И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. - М.: Наука, 1974. - 456 с.

64. Габдулхаев Б.Г. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур// ДАН

СССР, 1968.- Т. 179.- N 2. - С. 260 - 264.
65. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1967. - 576 с.
66. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1963.- 640 с.
67. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки/Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский . - М.: Наука, 1978. - 296 с.
68. Гельфанд И.М. Коммутативные нормированные кольца/ И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.В. Шилов . - М.: Физматгиз, 1960.- 316 с.
69. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними/ И.М. Гельфанд, Г.В. Шилов . - М.: Физматгиз, 1958.- 440 с.
70. Глускин Е.Д. Об одной задаче о поперечниках // Доклады АН СССР, 1974. - Т.219. - N 13. - С.527 - 530.
71. Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве/ И.Ц. Гохберг , М.Г. Крейн.- М.: Наука, 1965. - 448 с.
72. Гохберг И.Ц. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов/ И.Ц. Гохберг, Н.Я. Крупник.- Кишинев: Штинца, 1973.- 426 с.
73. Гохберг И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения/ И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
74. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, часть 2.- М.- Л.: ГТТИ, 1934. - 320 с.
75. Гусейнов А.И. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений/ А.И. Гусейнов, Х.Ш. Мухтаров . -М.: Наука, 1982. - 414 с.
76. Джишкариани А.В. К решению сингулярных интегральных уравнений приближенными проекционными методами // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1979. - Т. 19.- N 5. - С. 1149-1161.
77. Джишкариани А.В. К решению сингулярных интегральных уравнений коллокационными методами // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1981. - Т. 21.- N 2. - С. 355-362.
78. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М.: Наука, 1977. - 511 с.
79. Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложение к задачам механики. - Тбилиси: Мецниереба, 1979. - 137 с.
80. Емельянов К.В. О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода/ К.В. Емельянов, А.М. Ильин // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967.-

Т.7.-
N 4.- С. 905-910.

81. Жечев И.И. Приближенное решение систем нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на замкнутых контурах интегрирования// Nature. Пловдив, 1973.- Т. 6.- N 1.- С.19-25.

82. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1968. - 287 с.

83. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ: Справ. пособие.- Киев: Наукова думка, 1986. - 584 с.

84. Иванов В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения/ В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. - М.: Наука, 1978. - 270 с.

85. Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1968. - 448 с.

86. Исмагилов Р.С. Поперечники компактов в линейных нормированных пространствах // Геометрия линейных пространств и теория операторов. - Ярославль: Ярослав. гос. ун-т, 1977. - С. 75 - 113.

87. Исмагилов Р.С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи математических наук, 1974. - Т.79. - N 1. - С. 161 - 178.

88. Какичев В.А. Методы решения некоторых краевых задач для аналитических функций двух комплексных переменных.- Тюмень: Тюменский гос. ун-т, 1973.- 124с.

89. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук, 1948.- Т. III. - В. 6.- С. 89 - 185.

90. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - М: Наука, 1959. - 684 с.

91. Канторович Л. В. Функциональный анализ/ Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - М: Наука, 1977.- 750 с.

92. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа/ Л.В. Канторович, В.И. Крылов.- Л.-М.: ГИТТЛ, 1949.- 696 с.

93. Карпенко Л.Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи полиномов Якоби// Прикладная математика и механика, 1966. Т. 30.- N 3. С. 564-569.

94. Кашин Б.С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Серия математическая, 1977. - Т. 41. - N 1. - С. 334 - 351.

95. Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики некото-

рых вполне ограниченных метрических пространств // Доклады АН СССР, 1956. - Т. 198. - N 3. - С. 585 - 589.

96. Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. - М.: Наука, 1985. - 470 с.

97. Колмогоров А.Н. ε-энтропия и ϵ-емкость множеств в функциональных пространствах/ А.Н. Колмогоров , В.М. Тихомиров // Успехи математических наук, 1959. - Т. 14. - Вып.2. - С. 3 - 86.

98. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния/ Д. Колтон, Р. Кресс - М.: Мир, 1987. - 311 с.

99. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения.- М.: Наука, 1976. - 320 с.

100. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.-М.: Наука, 1984. - 352 с.

101. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.- 424 с.

102. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений/ М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко и др.- М.: Наука, 1969. - 456 с.

103. Крикунов Ю.М. Обобщенная краевая задача Римана и линейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение// Уч. записки Казанского ун-та, 1956.- Т. 116.- Вып. 4. - С. 3-30.

104. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов.- М.: Наука, 1967. - 498 с.

105. Купрадзе В.Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения.- Л.: ГИТТЛ, 1950.- 280 с.

106. Купрадзе В.Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости/ В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гечелиа , М.О. Башелейншвили , Т.В. Баргуладзе . - М.: Наука, 1976. - 664 с.

107. Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.- Киев: Наукова думка, 1968.- 210 с.

108. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Тр. ЦАГИ, 1932. - Т. 118. - С. 3 - 56.

109. Лаврентьев М.М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. // Успехи математических наук, 1979.- Т. 34.- N 2.- С. 143.

110. Лаврентьев М.М. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. //Сиб. матем. журн., 1980.- Т. 21.- N 3.- С. 225-228.

111. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа/ М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатских. - М.: Наука, 1980. - 288 с.

112. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. - М.: Наука, 1977. - 448 с.

113. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент - М.: ТОО "Янус", 1995. - 520 с.

114. Лифанов И.К. Обоснование численного метода "дискретных вихрей" решения сингулярных интегральных уравнений/ И.К. Лифанов , Я.Е. Полонский // Прикладная математика и механика, 1975. - Т. 39.- N 4. - С. 742-746.

115. Лифанов И.К. Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения/ И.К. Лифанов, Е.Е. Тыртышников // Вычислительные процессы и системы. - М.: Наука, 1990. - Вып. 7. - С. 94 - 278.

116. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.- Киев: Наукова думка, 1980. - 264 с.

117. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа/
Л.А. Люстерник, В.И. Соболев . - М.: Наука, 1965. - 540 с.

118. Майоров В.Е. Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи математических наук, 1975. - Т.30. - N 6. - С. 179 - 180.

119. Маковоз Ю.И. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве // Математический сборник, 1972. - Т. 87. - N 1. - С. 136 - 142.

120. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами// Труды АН Тадж. ССР. - Душанбе, 1963. - Т. 1. - 126 с.

121. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз, 1962. - 254 с.

122. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. - М.: ГИФМЛ, 1959. - 232 с.

123. Мусаев Б.И. Конструктивные методы в теории сингулярных интегральных уравнений // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.- Тбилиси: ТГУ, 1988. - 339 с.

124. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.

125. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 612 с.

126. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. - М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. - 688 с.

127. Обломская Л.Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968. - Т. 8.-
N 2. - С. 417-426.

128. Переверзев С.В. Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с дифференциаль-

ными ядрами // Украинский математический журнал, 1985. - Т. 38.- N 1.- С. 55-63.

129. Переверзев С.В. Об оптимизации методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференциальными ядрами // Сибирский математический журнал, 1987.- Т. 28.- N 3.- С. 173-183.

130. Переверзев С.В. О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I // Украинский математический журнал, 1988.- Т. 40.- N 1.- С. 84-91.

131. Переверзев С.В. О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. II // Украинский математический журнал, 1989.- Т. 41.- N 2.- С. 189-193.

132. Переверзев С.В. Оценка сложности приближенного решения уравнений Фредгольма второго рода с дифференциальными ядрами // Украинский математический журнал, 1989.- Т. 41.- N 10.- С. 1422-1425.

133. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений.- М.: Наука, 1965.- 128 с.

134. Потапов М.К. О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p.// Сб. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Наука, 1961.- С. 64-69.

135. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. - М: Мир, 1979. - 494 с.

136. Пресдорф З. Линейные интегральные уравнения. - В кн.: Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. М.: Наука, 1988.- Т. 27.- С. 5-130.

137. Привалов И.И. Интегральные уравнения.- М.-Л.: ОНТИ, 1935.- 238 с.

138. Раковщик Л.С. О методе Ньютона-Канторовича// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968. - Т. 8.- N 6. - С. 1207-1217.

139. Саникидзе Д.Г. Вычислительные процессы для сингулярных интегралов с ядром Коши и их некоторые приложения // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - М.: МФТИ, 1986. - 390 с.

140. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.- Минск: Наука и техника, 1987.- 688 с.

141. Сеге Г. Ортогональные многочлены.- М.: Физматгиз, 1962. - 500 с.

142. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений.- Санкт-Петербург: Политехника, 2001.- 240 с.

143. Смирнов В.И. Курс высшей математики.- Т 4.- М.: ГИФМЛ, 1958. - 812 с.

144. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.- М.: Го-

стехиздат, 1950.- 424 с.
145. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974. - 808 с.
146. Стечкин С.Б. О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами // Успехи математических наук, 1954. - Т.9. - N 1. - С.133 - 134.
147. Сухарев А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. -М.: Наука, 1989. - 304 с.
148. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. - М.: Наука, 1986. - 111 с.
149. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики // Под ред. К.И.Бабенко. - М.: Наука, 1979. - 196 с.
150. Тиман А.Ф. Теория приближений функций действительного переменного.- М.: Физматгиз, 1960.- 624 с.
151. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений// Успехи математических наук, 1960. - Т.15. - N 13. - С.81 - 120.
152. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: Наука, 1975. - 304 с.
153. Тихомиров В.М. Теория приближений.- В кн.: Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.- М.: Наука, 1987. - Т. 14. - С. 105-170.
154. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач/ А.Н. Тихонов , В.Я. Арсенин . - М.: Наука, 1974. - 224 с.
155. Трауб Дж. Общая теория оптимальных алгоритмов/ Дж. Трауб , Х. Вожьняковский . - М.: Мир, 1983. - 382 с.
156. Трауб Дж. Информация, неопределенность, сложность/ Дж. Трауб , Х. Вожьняковский , Г. Васильковский . - М.: Мир, 1988. - 184 с.
157. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИЛ.- 1960.- 300 с.
158. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.- Т. 2.- М.: Физматгиз, 1959.- 808 с.
159. Хведелидзе Б.В. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения// Труды Тбилисского математического института АН Груз.ССР, 1958.- Т. 23.- С. 3-158.
160. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра.- В кн.: Итоги науки и техники. Серия: Математический анализ.- М.: Наука, 1979. - Т. 17. - С. 131-198.
161. Atkinson K.E. The Numerical Evaluation of the Cauchy Transform on Simple Closed Curves // Society for Industrial and Applied Mathematics. - Journal on Numerical Analysis, 1972. - V.

9. - P. 284-299.
162. Abel N.H. Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales definies// Oeuvres completes, 1823.- V. I.- P. 11-27.
163. Abel N.H. Auflosung einermechanischen Aufgabe// Oeuvres completes, 1826.- V. I.- P. 97-101.
164. Baker C.T.H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations// Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000. - V. 125.- P. 217-249.
165. Boikov I.V. The Optimal Algorithms of Calculation of Singular Integrals, Decision of Singular Integral Equations and Its Applications// 15 th Imacs World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. Berlin, 1997. V. 1. Computational Mathematics. Berlin: Wissenschaft Technik Verlag, 1997.- P. 587-592.
166. Boikov I.V. Optimal on accuracy methods for approximate solution of the second kind weakly singular Volterra integral equations for multi-
processor computers/I.V. Boikov, A.N. Tynda // International Conference on Computational Mathematics. Part two. Novosibirsk, 2002.- P. 380-388.
167. Bruner H. The Numerical Solution of Weakly Singular Volterra Integral Equations By Collocation on Graded Meshes// Mathematics of Computation, 1985.- V. 45.- N 172.- P. 417-437.
168. Brunner H. On the History of Numerical Methods for Volterra Integral Equations// CWI Newsletter, 1986.- N 11. - 20 p.
169. Brunner H. Piecewise polynomial collocation method for nonlinear weakly singular Volterra equations/ H. Brunner, A. Pedas and G. Vainikko // Mathematics of Computation, 1999.- V. 68.- N 227.-P. 1079-1095.
170. Chen Han-Lin. A quasi-wavelet algoritms for second kind boundary integral equations/ Chen Han-Lin, Peng Si-Long // Advanced in Compu-
tational Mathematics, 1999. - V. 11.- P. 355-375.
171. Davis H.T. A Survey of Methods for the Inversion of Integrals of Volterra Type// Indiana University Studies. Bloomington, 1927.- V. 14 (Studies ь. 76, 77). 77 p.
172. Du Boir-Reimond P. Bemerkungen uber $\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$ J. Reine Angew. Math., 1888. - V. 103. - P. 204-229.
173. Du Jinyuan. On the numerical solution for singular integral equa-
tions with Hilbert kernel// Math. Num. Sin, 1989.- V. 2.- N 2.- P. 148-166.
174. Du Jinyuan. The collocation methods for singular integral equa-
tions with Cauchy kernels// Acta Math. Sci, 2000.- V. 20.- N 3. -

P. 289-302.
175. Dzhishkariani A. Projective-iterative method of solution of integ-
ral equations/A. Dzhishkariani, G. Khvedelidze // Proceedings of A. Raz-
madze Mathematical Institute, 1999.- V. 120.- P. 27-47.
176. Elliot D. The Approximate Solution of Singular Integral Equations // Solution Methods for Integral Equations. - Theory and Applications, 1979. - P. 83-107.
177. Golberg M.A. A Superconvergence Result For the Generalized Airfoil Equation with Application to the Flap Problem / M.A. Golberg, M. Lea , G. Miel// Journal of Integral Equations, 1982. - V. 5.- N 2. -
P. 175-186.
178. Huber A. Eine Naherungsmethode zur Auflosung Volterrascher Integralgleichungen// Monatsh. Math. Phys., 1939.- V. 47 .- P. 240-246.
179. Jen E. Cubic splines and approximate solution of singular integral equations/E. Jen, R.P. Srivastav // Math. Comp., 1981.- V. 37.- N 156.- P. 417-423.
180. Junghanns P. Kollokationverfahren zur naherungsweisen Losung singularer Integralgleichungen mit unstetegen Koeffizienten // Math. Nachr., 1981.- V. 102.- P. 17-24.
181. Junghanns P. Numerical analysis for one dimensional Cauchy singular integral equations/ P. Junghanns, B. Silbermann // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000.- V. 125.- N 1-2 .- P. 395-421.
182. Lalesco T. Sur l'equation de Volterra// J. de Math. Pures Appl., 1908, V. 6.- N 4.- P. 125-202.
183. Lalesco, T. Introduction a la theorie des equations integrales.- Paris: Hermann and Fils, 1912.- 71 p.
184. Le Roux J. Sur les integrales des equationslineaires aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes// Ann. Sci. Ecole Normale Super. Ser. 3, 1895.- V. 12. - P. 227-316.
185. Michlin S.G. Singulare Integraloperatoren/ S.G. Michlin, S. Pros-
sdorf. - Berlin: Acad. - Verl., 1980. - 514 p.
186. Neumann C. Untersuchungen uber das logarithmische and New-
ton's cheotential.- Teubner, Leipzig, 1877. - 120 p.
187. Pereversev S.V. On Optimization of Direct Methods of Solving Weakly Singular Integral Equations/ S.V. Pereversev, S.G. Solodky // Journal of Complexity, 1993.- V. 9.- P. 313-325.
188. Prossdorf S. Approximation Methods for Solving Singular

Integral Equations. - Berlin, 1981.- Preprint.- P. - Math. -12/81.- 31 p.

189. Prossdorf S. A Finite Element Collocation Method for Singular Integral Equations/ S. Prossdorf, G. Shmidt // Math. Nachr., 1981. - V. 100. - P. 33-60.

190. Prossdorf S. Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations/ S. Prossdorf, B. Silbermann.- Berlin.: Acad. Verl., 1991.-
544 p.

191. Ramm A.G. Theory and Applications of Some New Classes of Integral Equations.- Berlin: Springer- Verlag, 1980. - 343 p.

192. Riss M. Janrsber// Deutsch. Math, 1914.- V. B 29.- P. 131-137.

193. Qiya Hu. Stieltjes derivatives and β - polynomial spline collocation for Volterra integrodifferential equations with singularities // SIAM Jour-
nal of Numerical Analysis, 1996.- V. 33.- N 1.- P. 208-220.

194. Shmidt G. On spline collocation for singular integral equations.- Preprint. P. - Math. - 13/82, Berlin, 1982.- 42 p.

195. Sonine N. Sur la generalisation d'une formule d'Abel// Acta Math., 1884.- V. 3.- P. 171-176.

196. Tang T. A note on collocation methods for Volterra integro-differential equations with weakly singular kernels// IMA Journal Numerical Analysis, 1993.- V. 13.- P. 93-99.

197. Volterra V. Sulla inversione degli integralidefiniti// Nota I,II,III,IV. Atti Acc. Sc. Torino, 1896.-V. 31. - P. 311-323, 400-408, 557-567, 693-708.

198. Wagner C. On the numerical solution of Volterra integral equations, J. Math. Phys., 1954. - V.32.- P. 289-301.

199. Wolkenfelt P.H.M. The construction of reducible quadrature rules for Volterra integral and integro-differential equations// IMA Journal Numer. Anal., 1982.- V.2.- P. 131-152.

200. Wiener N. Uber eine Klasse Singularer Integralgleichungegen/ N. Wiener, E. Hopf // Berlin: Sitz. Acad. Wiss., 1931.- P. 696-706.

СОДЕРЖАНИЕ